

事前分布の設計について

～ 時間予測BPTモデルに対する不確実性を考慮したベイズ推定 ～

TERADA, Yoshikazu / 寺田 吉壺

大阪大学 大学院基礎工学研究科
システム創成専攻 数理科学領域

第4回 長期確率評価手法検討分科会（第二期）

2024年11月20日 10:00 ~ 12:00

再掲

時間予測モデルと BPTモデルの接点 (SSD-BPT model)

参考文献:

Ogata, Y. (2002). Slip-size-dependent renewal processes and Bayesian inferences for uncertainties, *Journal of Geophysical Research*, **107**(B11), 2268, doi:10.1029/2001JB000668.

逆ガウス分布（BPTモデル）

- ▶ 逆ガウス分布 $IG(\mu, \alpha^2)$ を以下で定義する.

$$f_{IG}(t \mid \mu, \alpha) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi\alpha^2 t^3}} \exp \left\{ -\frac{(t - \mu)^2}{2\alpha^2 \mu t} \right\} \quad (t > 0, \mu > 0, \alpha > 0)$$

- ▶ **問題点: 時間予測モデルとの整合性がない**

- 📌 時間予測モデルで推定した間隔を平均 μ に代入し,
BPTモデルで確率の評価を行っている.

- 📌 2つのモデルの関連が考慮されていない.

- ▶ **解決策: 時間予測モデルとBPTモデルの関連を考える!**

- 📌 時間予測モデルと背後の確率過程モデルの関連から
自然なモデルが導出できる!

逆ガウス分布（BPTモデル）とブラウン運動

- 標準ブラウン運動 W_t を用いて、以下の確率過程を考える

$$X_0 = 0, \quad X_t = \eta t + \sigma W_t, \quad \eta, \sigma > 0$$

- T_τ : 閾値 τ に初めて到達するまでにかかる時間

$$T_\tau := \inf\{t > 0 \mid X_t = \tau\} \sim \text{IG}\left(\frac{\tau}{\eta}, \frac{\sigma^2}{\eta\tau}\right)$$

- 各地震で閾値 τ が隆起量 u と関連していると仮定する

-  時間予測モデルとの整合性を考える:

$$\beta u_{i-1} = \mathbb{E}[T_i \mid U_{i-1} = u_{i-1}] = \mathbb{E}[T_{\tau_i}] = \frac{\tau_i}{\eta}$$

-  閾値 τ が隆起量 u と比例関係にあることを仮定: $u = a\tau$

-  記号の煩雑さを避けるため、隆起量と間隔のindexを揃える.

逆ガウス分布（BPTモデル）とブラウン運動

- 標準ブラウン運動 W_t を用いて, 以下の確率過程を考える

$$X_0 = 0, \quad X_t = \eta t + \sigma W_t, \quad \eta, \sigma > 0$$

- T_τ : 閾値 τ に初めて到達するまでにかかる時間

$$T_\tau := \inf\{t > 0 \mid X_t = \tau\} \sim \text{IG} \left(\frac{\tau}{\eta}, \frac{\sigma^2}{\eta\tau} \right)$$

- 各地震で閾値 τ が隆起量 u と関連していると仮定する

📌 逆ガウス回帰（時間予測BPT）モデルを得る.

$$T_i \sim \text{IG} \left(\beta u_i, \frac{\beta \gamma^2}{u_i} \right), \quad \gamma := a\sigma$$

$$\alpha^2 = \frac{\beta}{u_i} \gamma^2$$

📌 Ogata (2002, JGR) では, SSD-BPTモデルと呼ばれている.

事前分布の設計

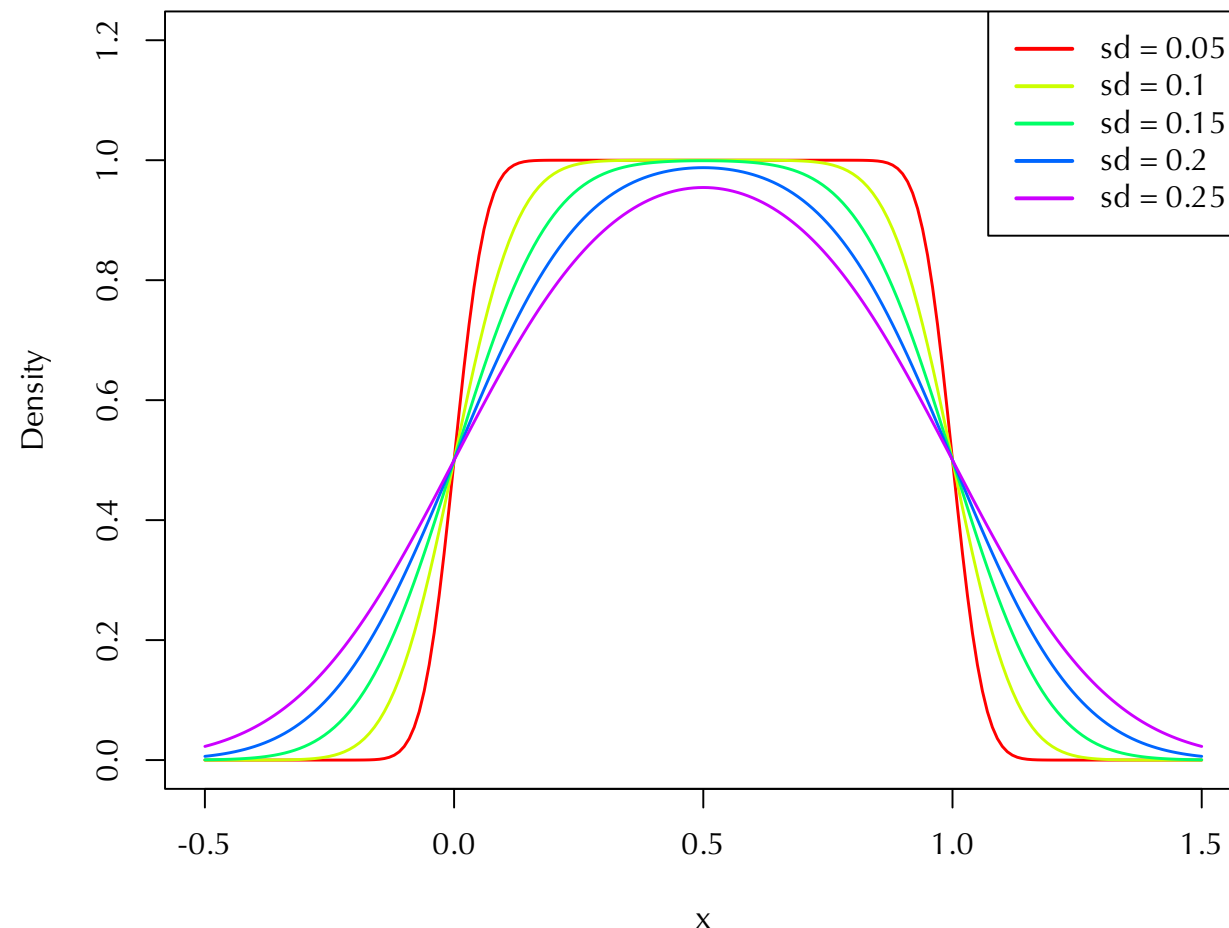
隆起量の不確実性

▶ 不確実性のモデル化（軟化一様分布）

📌 $U = a \sim b \text{ m} \pm 2\sigma \text{ m}$ という不確実性を階層的にモデル化

$$U = \mu + \epsilon, \quad \mu \sim \text{Unif}(a, b), \quad \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

📌 U の分布は、一様分布のある種の軟化としても捉えられる。



隆起量の不確実性

▶ 宝永地震の隆起量

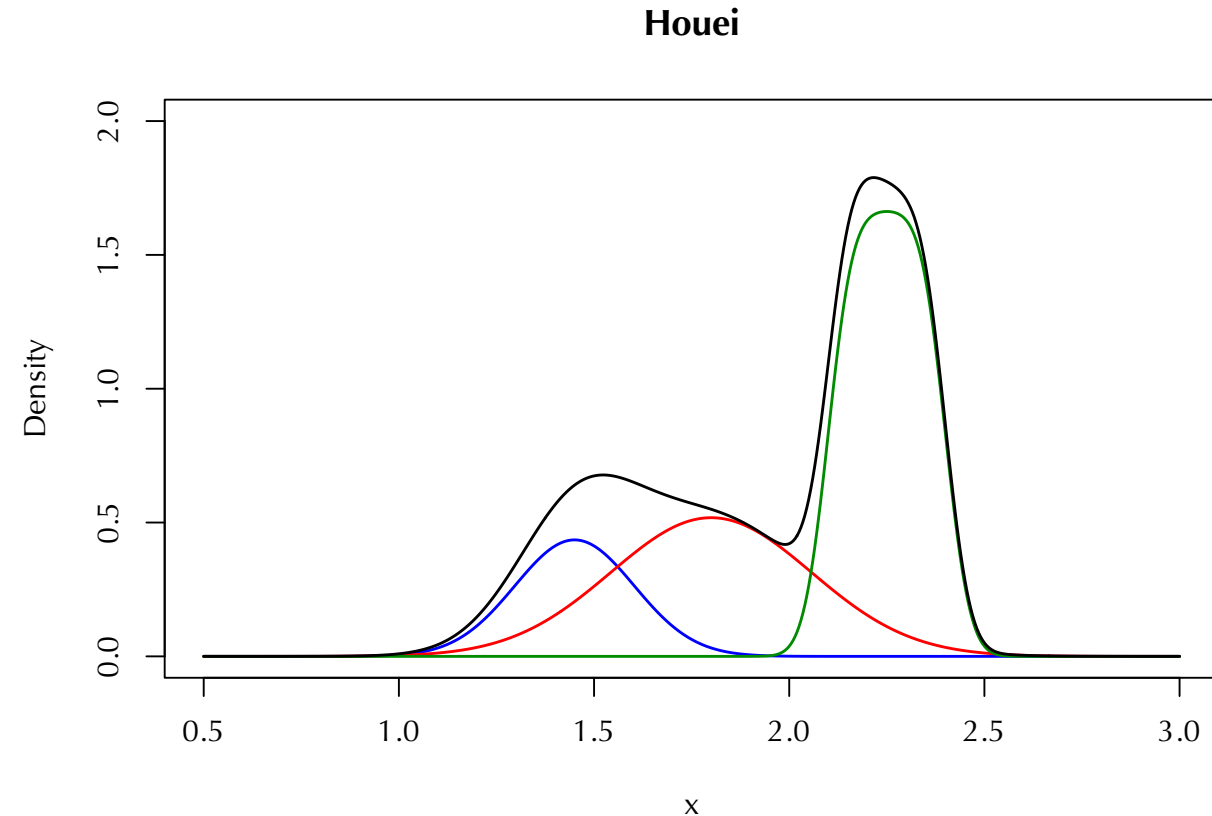
- 📌 久保野家 1 : $1.4 \sim 1.5\text{m} \pm 0.3\text{m}$
- 📌 久保野家 2 : $1.7 \sim 1.9\text{m} \pm 0.5\text{m}$
- 📌 万変記 : $2.1 \sim 2.4\text{m}$

▶ 不確実性のモデル化

- 📌 $U = a \sim b \text{ m} \pm 2\sigma \text{ m}$ を階層的にモデル化 (convolution)

$$U = \mu + \epsilon, \quad \mu \sim \text{Unif}(a, b), \quad \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

- 📌 万変記にも, 仮に $\pm 0.1\text{m}$ の小さい誤差を考えてみる
- 📌 一旦, 3つの不確実性を1:2:3で混合してみる



隆起量の不確実性

▶ 安政地震の隆起量

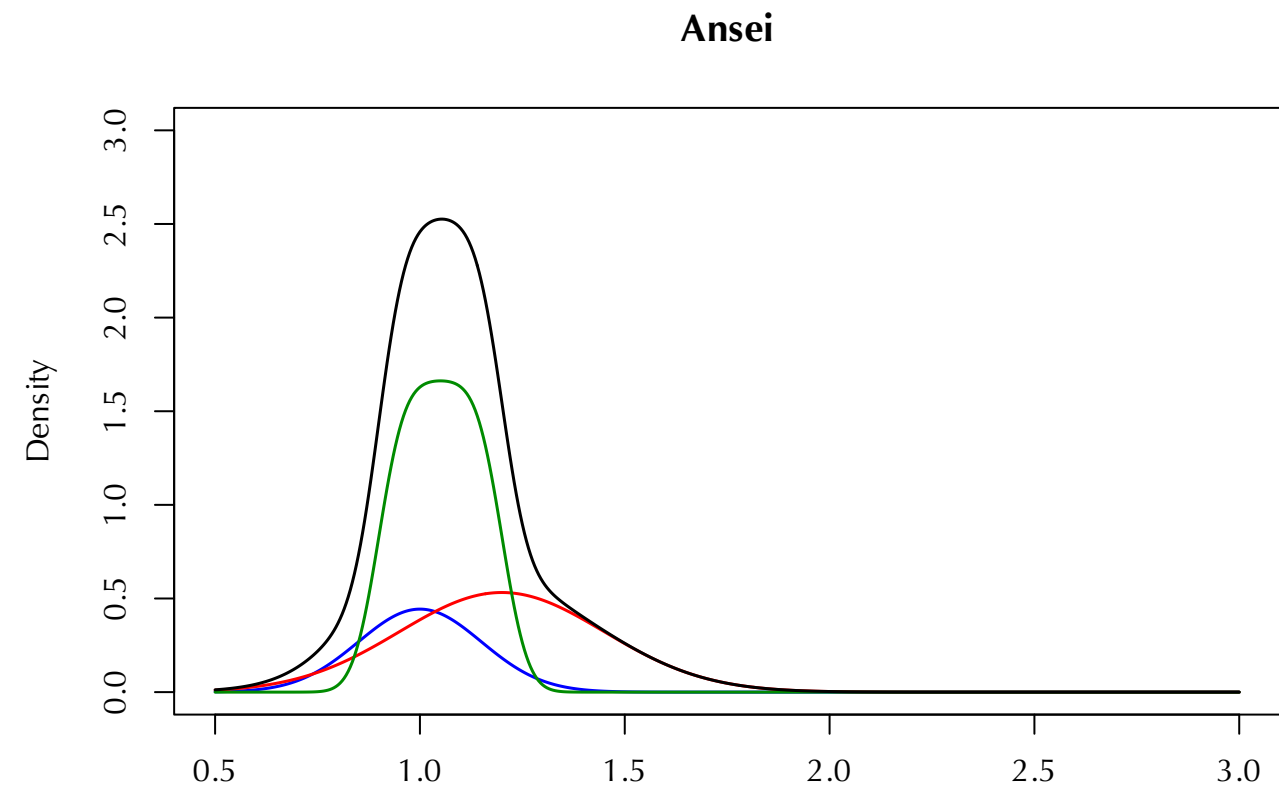
- 📌 手鏡 その1 : 1.0 m $\pm$ 0.3m
- 📌 手鏡 その2 : 1.2 m $\pm$ 0.5m
- 📌 土佐國 : 0.9 ~ 1.2m

▶ 不確実性のモデル化

- 📌 $U = \mu \text{ m} \pm 2\sigma \text{ m}$ を階層的にモデル化 (convolution)

$$U = \mu + \epsilon, \quad \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

- 📌 土佐國にも, 仮に $\pm 0.1\text{m}$ の小さい誤差を考えてみる
- 📌 一旦, 3つの不確実性を1:2:3で混合してみる



事前分布が混合分布の場合

▶ 事前分布に混合分布を用いた場合, 事後分布も混合分布となる.

📌 混合事前分布 $\theta \sim \sum_{k=1}^K \pi_k p_k(\theta)$ を考える.

📌 このとき, 事後分布は混合分布となる.

$$p(\theta \mid x) = \frac{\sum_{k=1}^K \pi_k p(x \mid \theta) p_k(\theta)}{\sum_{k=1}^K \pi_k m_k(x)} = \sum_{k=1}^K \frac{\pi_k m_k(x)}{\sum_{l=1}^K \pi_l m_l(x)} p_k(\theta \mid x)$$

📌 ここで, $m_k(x)$ は以下の周辺尤度を表している.

$$m_k(x) := \int p(x \mid \theta) p_k(\theta) d\theta$$

パラメータに対する事前分布

- ▶ 不確実性を考慮する場合小さい γ は不安定となる.

- 📌 観測データが少ないことによる不安定性

- 📌 そこで, 並行移動したガンマ分布を考える.

$$\gamma \sim \delta + G$$

- 📌 ここで, $\delta > 0$ は定数で, G はガンマ分布に従う確率変数

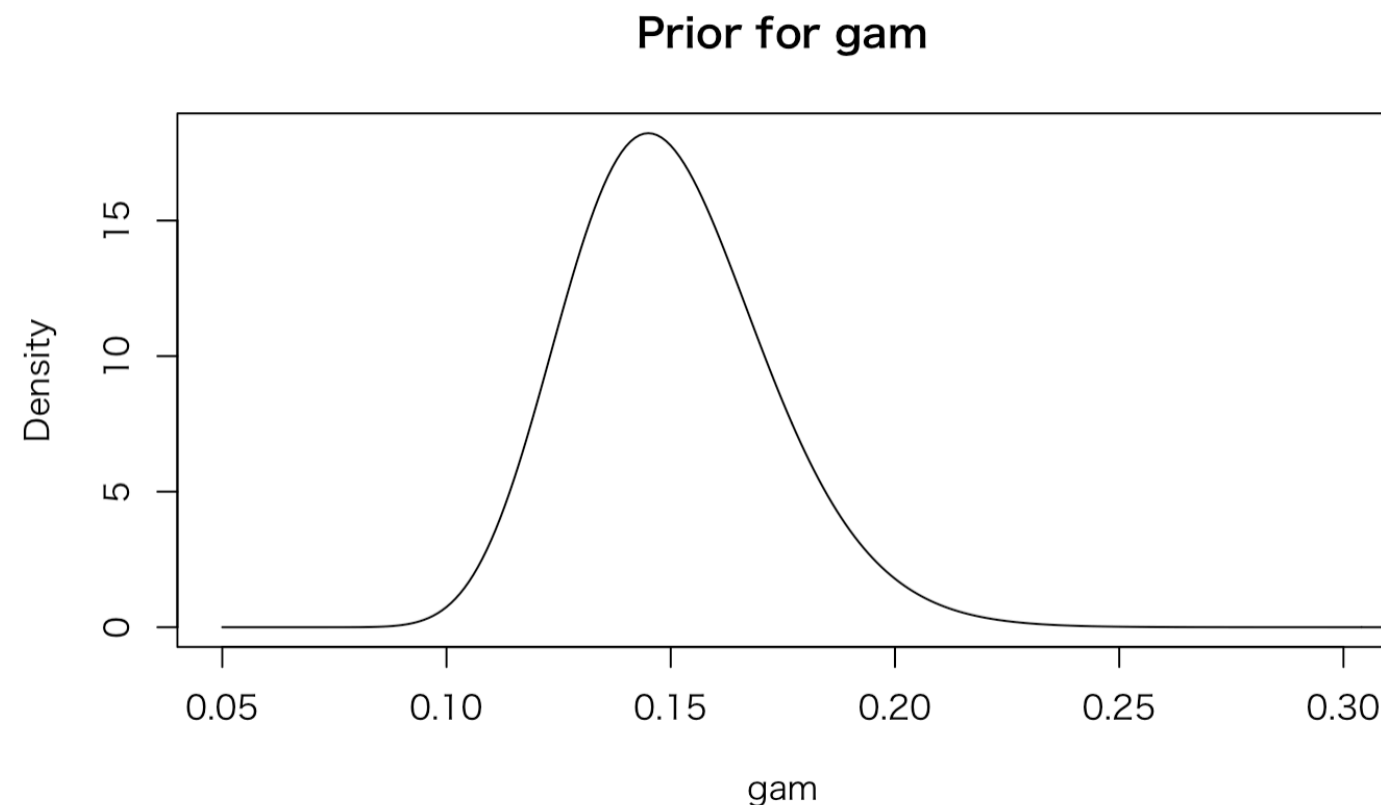
- 📌 ガンマ分布 $\text{Gam}(\alpha, \lambda)$ の密度関数

$$f_G(x \mid \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$$

- 📌 $G \sim \text{Gam}(\alpha, \lambda) \Rightarrow \mathbb{E}[G] = \alpha/\lambda$

パラメータに対する事前分布

- ▶ 不確実性を考慮する場合小さい γ は不安定となる.
 - 📌 並行移動したガンマ分布 $\gamma \sim \delta + G$ を考える.
 - 📌 ここで, $\delta > 0$ は定数で, $G \sim \text{Gam}(\alpha, \lambda)$
 - 📌 不確実性を考慮しない場合: γ の最尤推定値 = 約0.06
- ⇒ 仮に, $\delta = 0.05$, $\alpha = 20$, $\lambda = 200$ としてみる.



推測結果

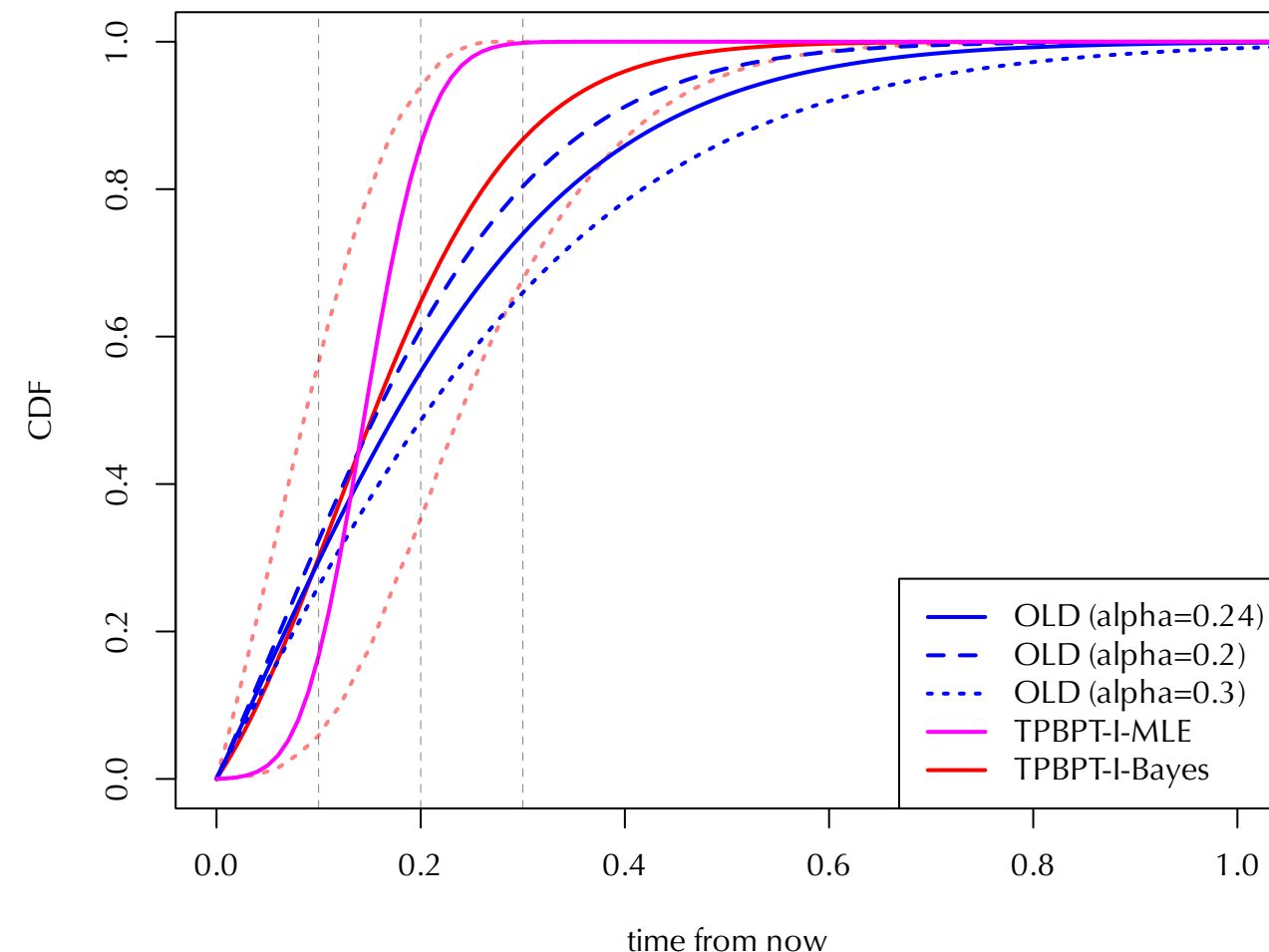
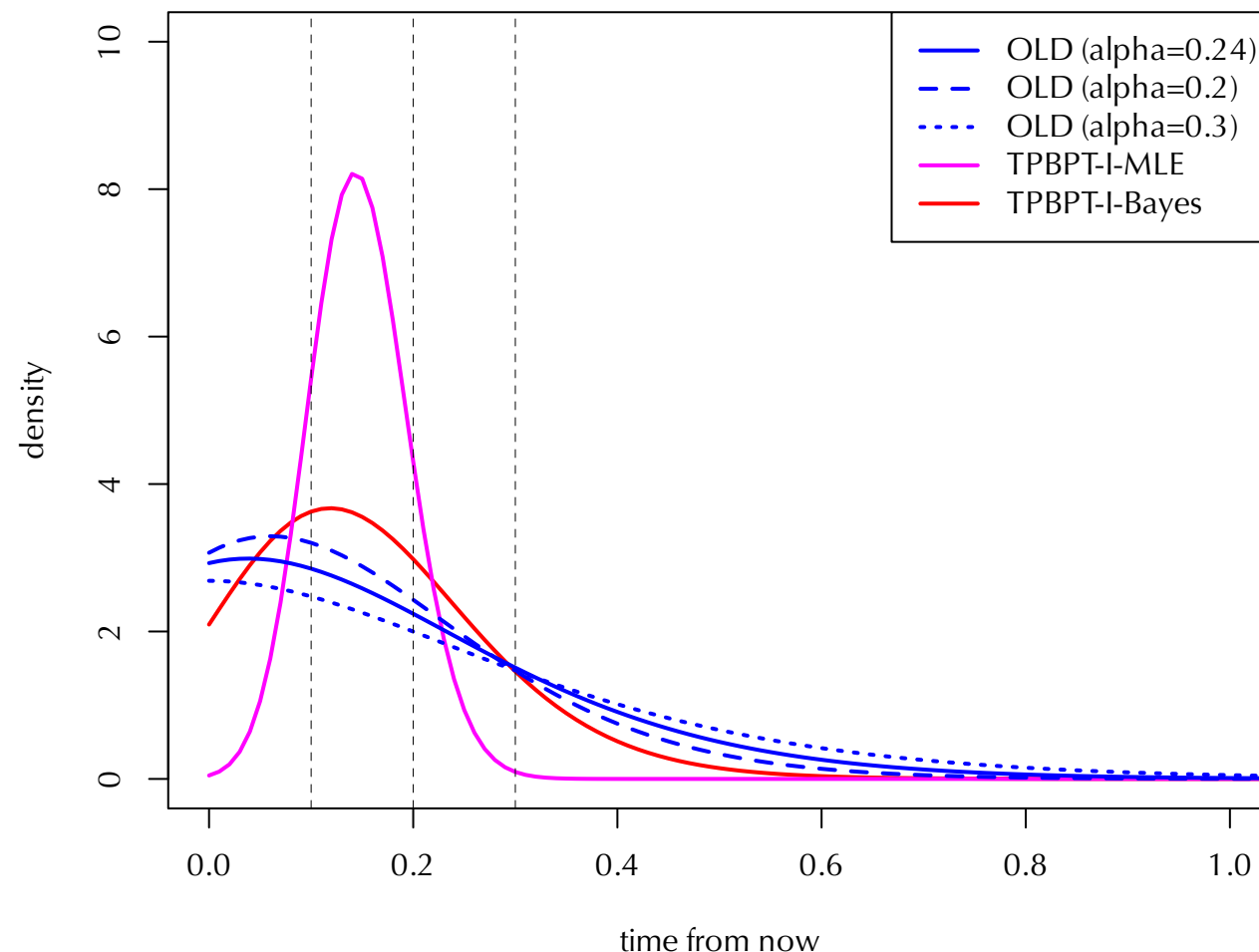
時間予測BPTモデルのベイズ推定 (不確実性を考慮)

▶ 事後予測分布による評価の例

- 📌 回帰パラメータの事前分布に以下を設定

$$\beta \sim N(0.8, 0.05^2), \gamma \sim \delta + G$$

- 📌 不確実性の表現は前述の通り



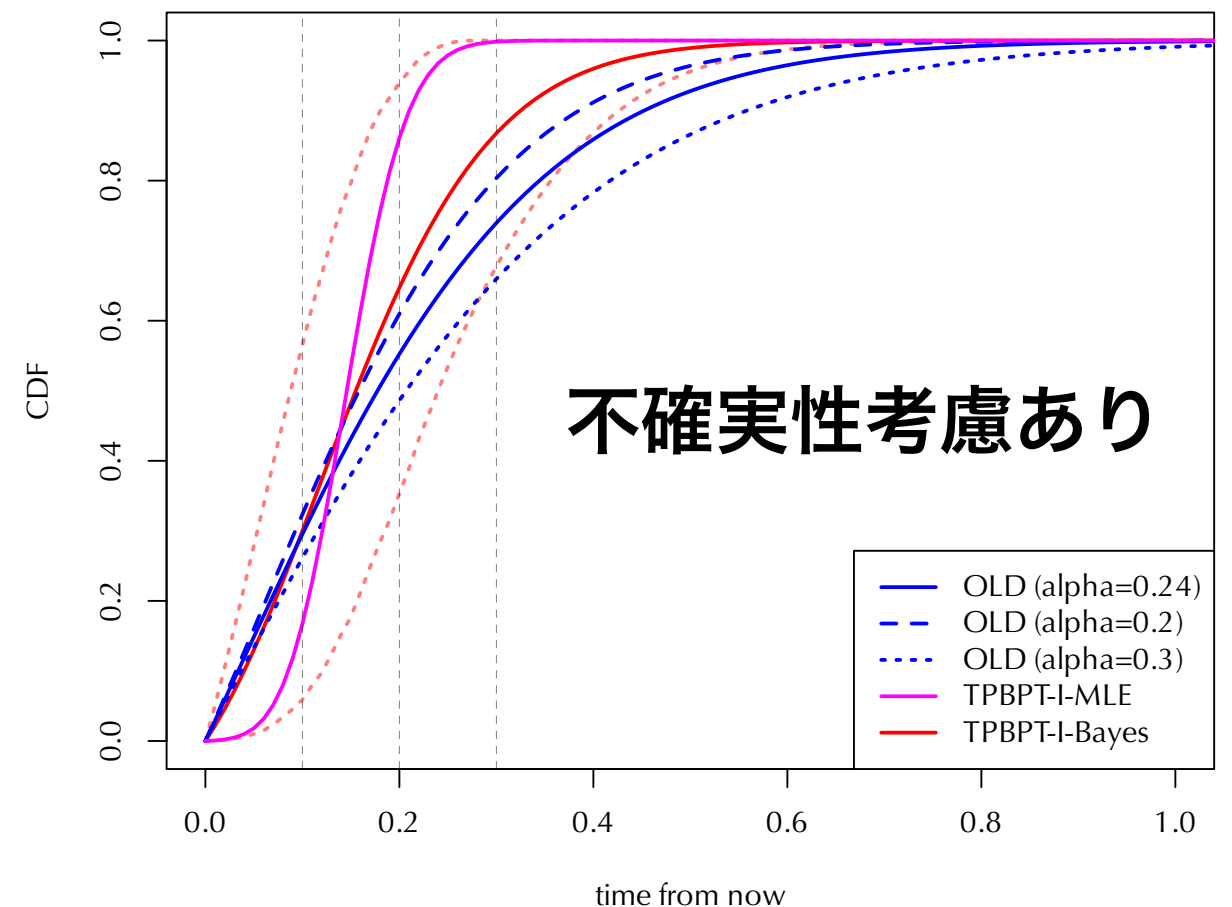
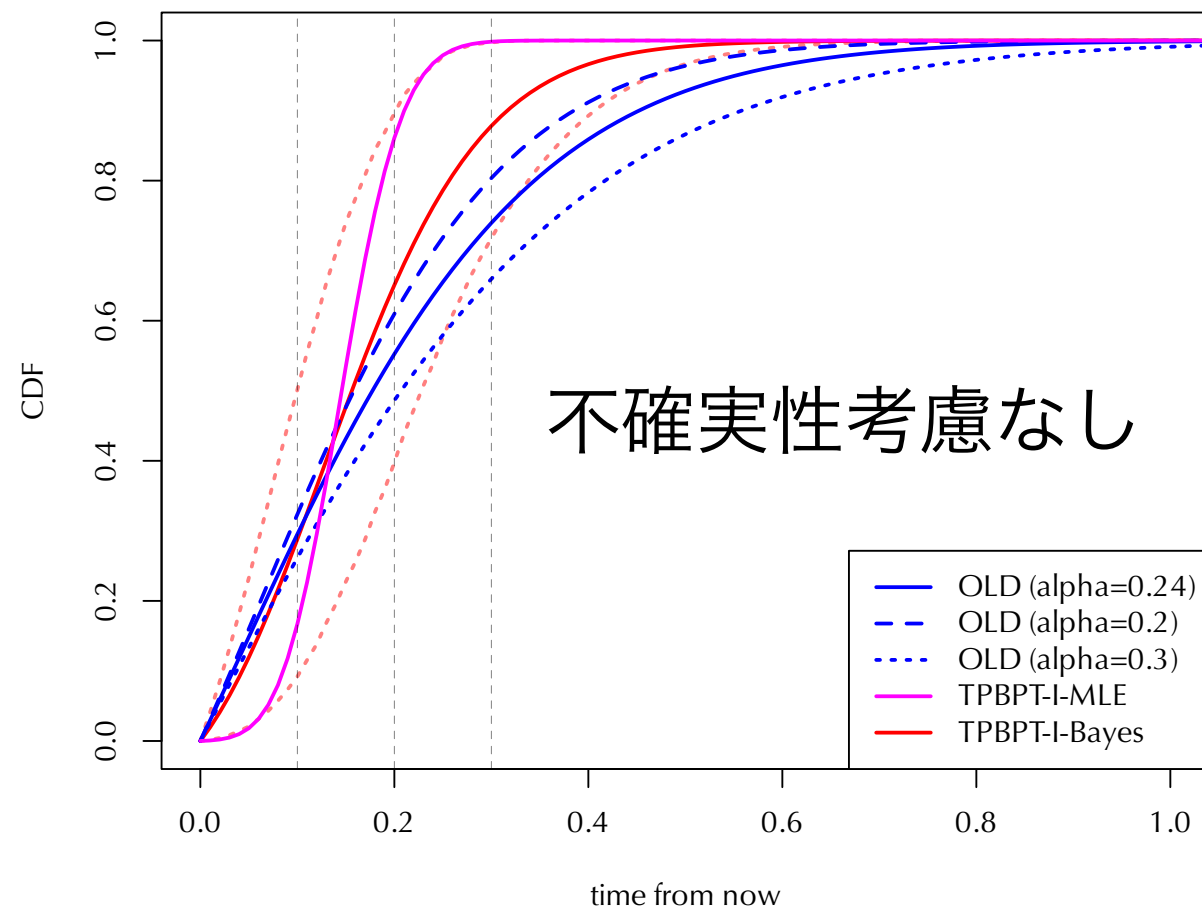
時間予測BPTモデルのベイズ推定 (不確実性を考慮)

▶ 事後予測分布による評価の例

- 📍 回帰パラメータの事前分布に以下を設定

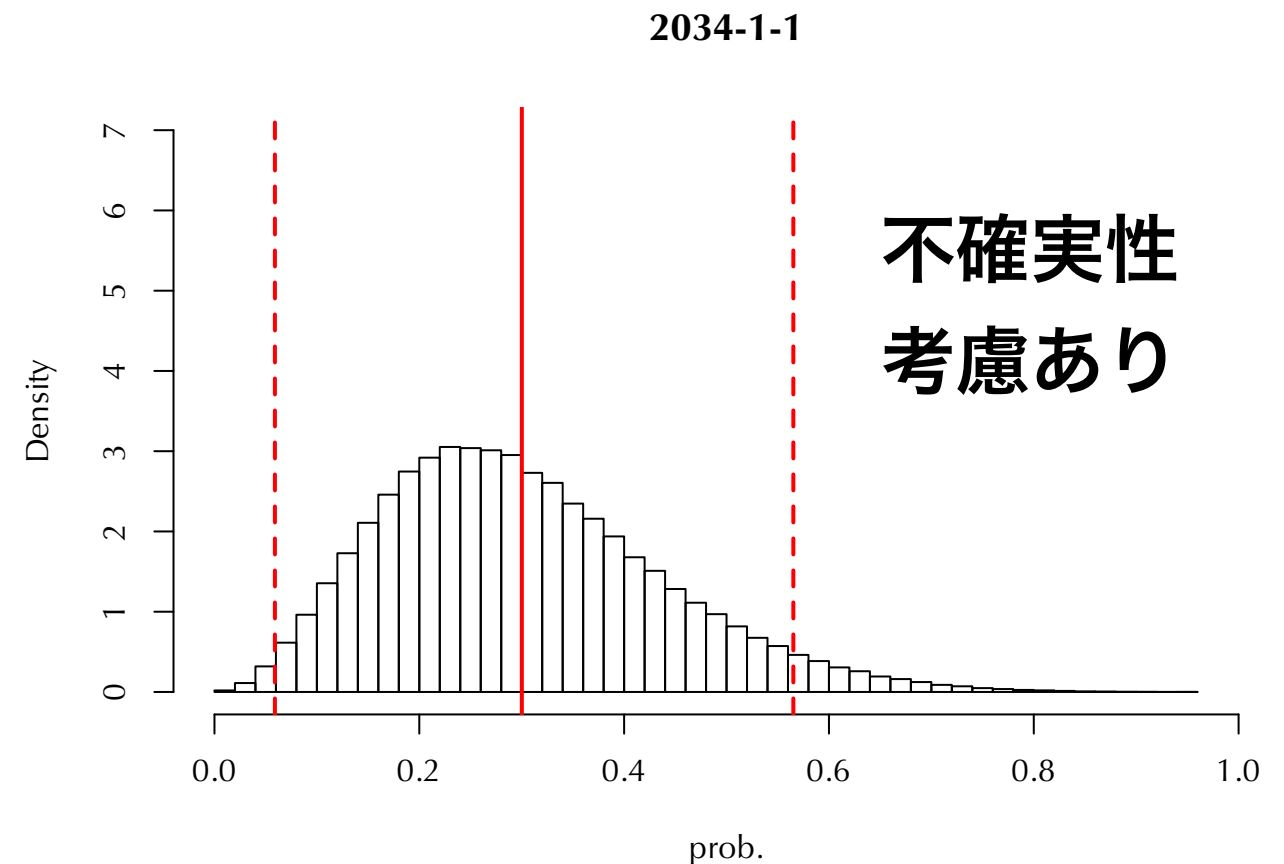
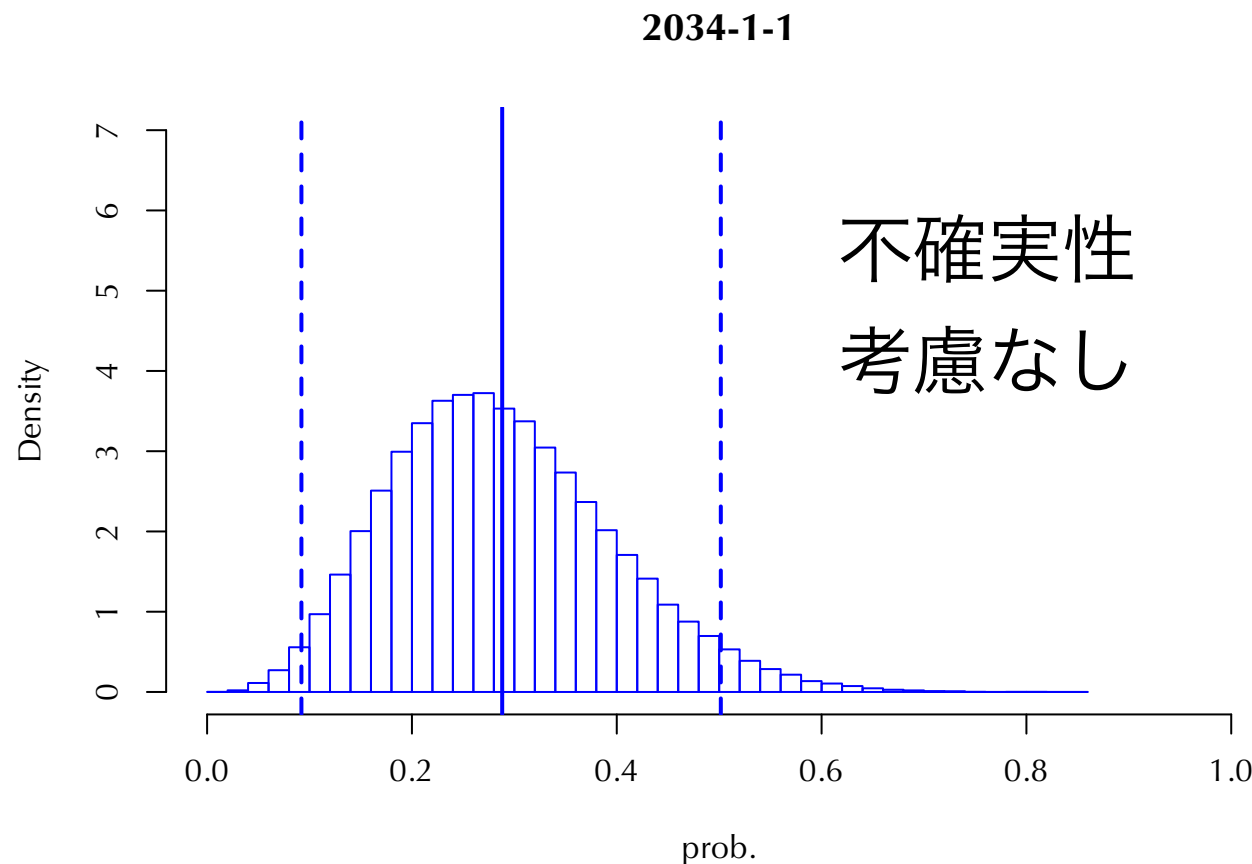
$$\beta \sim N(0.8, 0.05^2), \gamma \sim \delta + G$$

- 📍 不確実性の表現は前述の通り



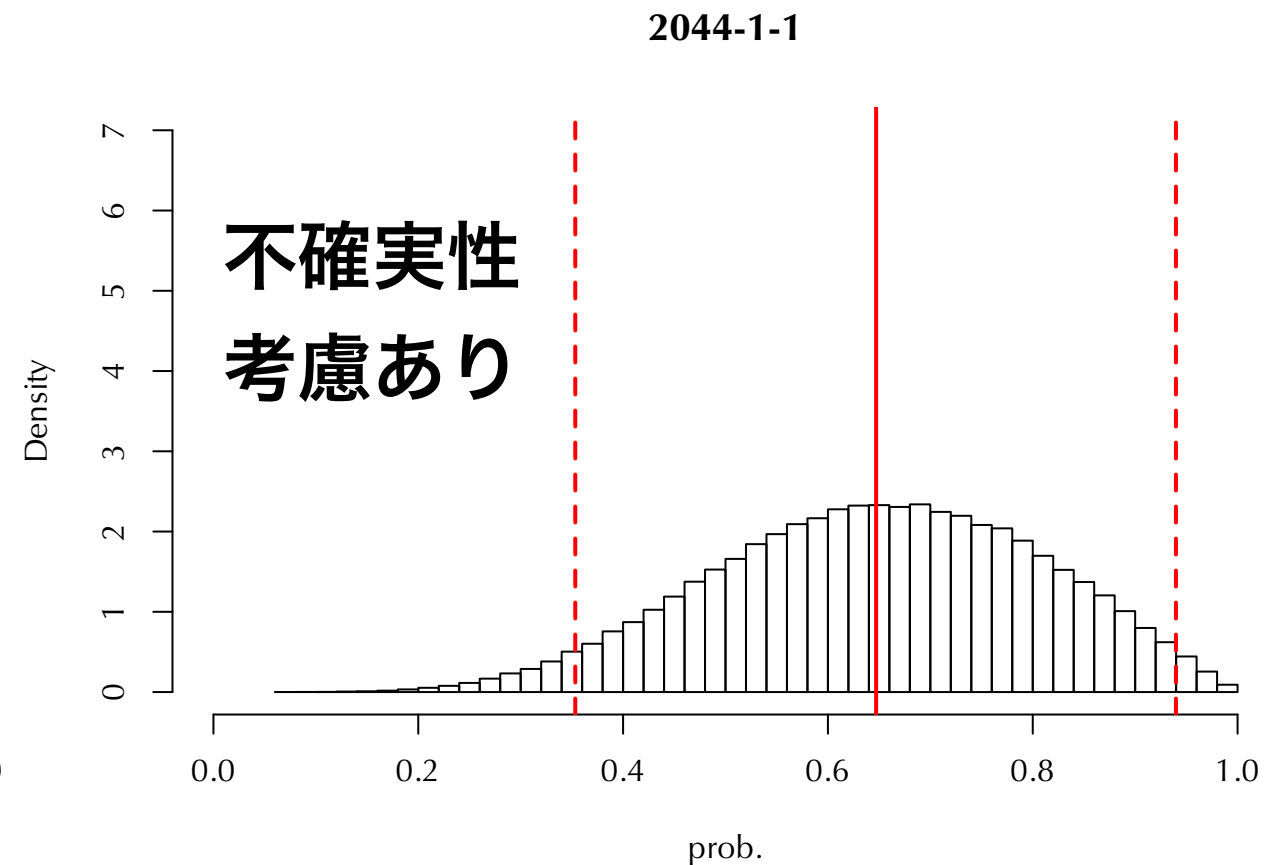
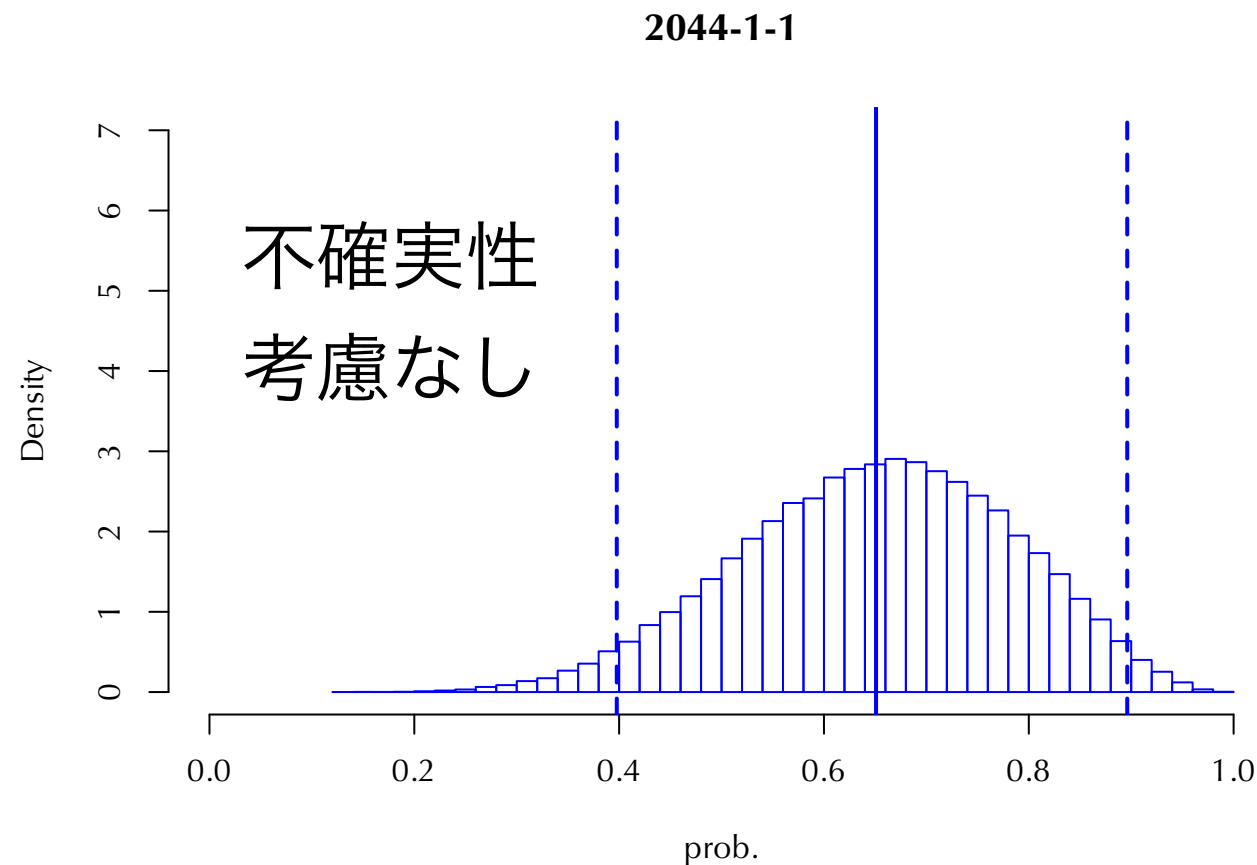
2034年までに発生する確率

- ▶ これまでの評価: 32.4%, 29.5%, 26.1% ($\alpha = 0.2, 0.24, 0.3$)
- ▶ 最尤推定: 16.7%
- ▶ ベイズ (FIX): 28.8% (95% HDI: 9.2% ~ 50.2%)
- ▶ ベイズ (UNC): 30% (95% HDI: 5.9% ~ 56.5%)



2044年までに発生する確率

- ▶ これまでの評価: 61.0%, 55.2%, 48.6% ($\alpha = 0.2, 0.24, 0.3$)
- ▶ 最尤推定: 86.1%
- ▶ ベイズ (FIX): 65.1% (95% HDI: 39.8% ~ 89.6%)
- ▶ ベイズ (UNC): 64.7% (95% HDI: 35.3% ~ 94.0%)



2054年までに発生する確率

- ▶ これまでの評価: 80.4%, 74.0%, 66.0% ($\alpha = 0.2, 0.24, 0.3$)
- ▶ 最尤推定: 99.8%
- ▶ ベイズ (FIX) : 87.8% (95% HDI: 71.8% ~ 99.7%)
- ▶ ベイズ (UNC): 86.8% (95% HDI: 67.8% ~ 100%)

