

不確実性を考慮した評価方法

～ 時間予測BPTモデルに対する不確実性を考慮したベイズ推定 ～

TERADA, Yoshikazu / 寺田 吉壺

大阪大学 大学院基礎工学研究科
システム創成専攻 数理科学領域

合同会

2024年10月11日 10:00 ~ 12:00

- ▶ 時間予測モデルによるこれまでの評価
- ▶ 時間予測モデルとBPTモデルの接点
 - 🔗 逆ガウス分布（BPTモデル）と時間予測モデルとの乖離
 - 🔗 逆ガウス分布（BPTモデル）とブラウン運動
 - ⇒ 時間予測BPTモデル (SSD-BPTモデル; Ogata, 2002)
- ▶ 時間予測BPTモデルの不確実性を考慮したベイズ推定

これまでの評価方法

時間予測モデルと推定

▶ 記号

📌 U_i : i 番目の地震発生時の隆起量, O_i : i 番目の地震発生時刻

📌 $T_i = O_i - O_{i-1}$: 地震発生間隔, $O_0 = 0$ とする.

▶ 時間予測モデル:

📌 U_{i-1} が観測されたという下で, $i-1$ 番目から i 番目の活動までの条件付き期待経過時間に対して以下でモデリング.

$$\mathbb{E}[T_i \mid U_{i-1}] = \frac{U_{i-1}}{V} = \beta U_{i-1}, \quad \beta := \frac{1}{V}$$

📌 資料では, 1つのデータのみを用いて推定と記述.

$$\hat{\beta}_{\text{OLD}} = T_i / U_{i-1}$$

時間予測モデルと推定

▶ 記号

📌 U_i : i 番目の地震発生時の隆起量, O_i : i 番目の地震発生時刻

📌 $T_i = O_i - O_{i-1}$: 地震発生間隔, $O_0 = 0$ とする.

▶ 時間予測モデル:

📌 U_i が与えられた下での, 条件付き期待値を以下で推定.

$$\hat{T}_{i+1}^{(\text{OLD})} = (O_i - O_{i-1})U_i/U_{i-1} = \underbrace{\frac{T_i}{U_{i-1}}}_{=\hat{\beta}_{\text{OLD}}} \times U_i$$

📌 最小二乗法でも推定可能.

$$\hat{\beta}_{\text{OLS}} = \frac{\sum_{i=2}^n T_i U_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n-1} U_i^2}$$

時間予測モデルと推定

- 現状の評価では, 時間予測モデルによる推定後, 確率評価をする際にBPTモデル (逆ガウス分布) を用いている.
- 平均 $\mu = \hat{T}_{i+1}^{(\text{OLD})}$, 変動係数 $\alpha = 0.24$ の逆ガウス分布
- 実際のデータに適用し, 次の活動までの時間を評価する.
 - 📌 100年を1単位とした以下のデータを用いる.

発生日	i	O	T	U
1707年10月28日	0	0	—	1.8
1854年12月23日	1	1.472521	1.47252	1.2
1946年12月21日	2	2.393068	0.92055	1.15

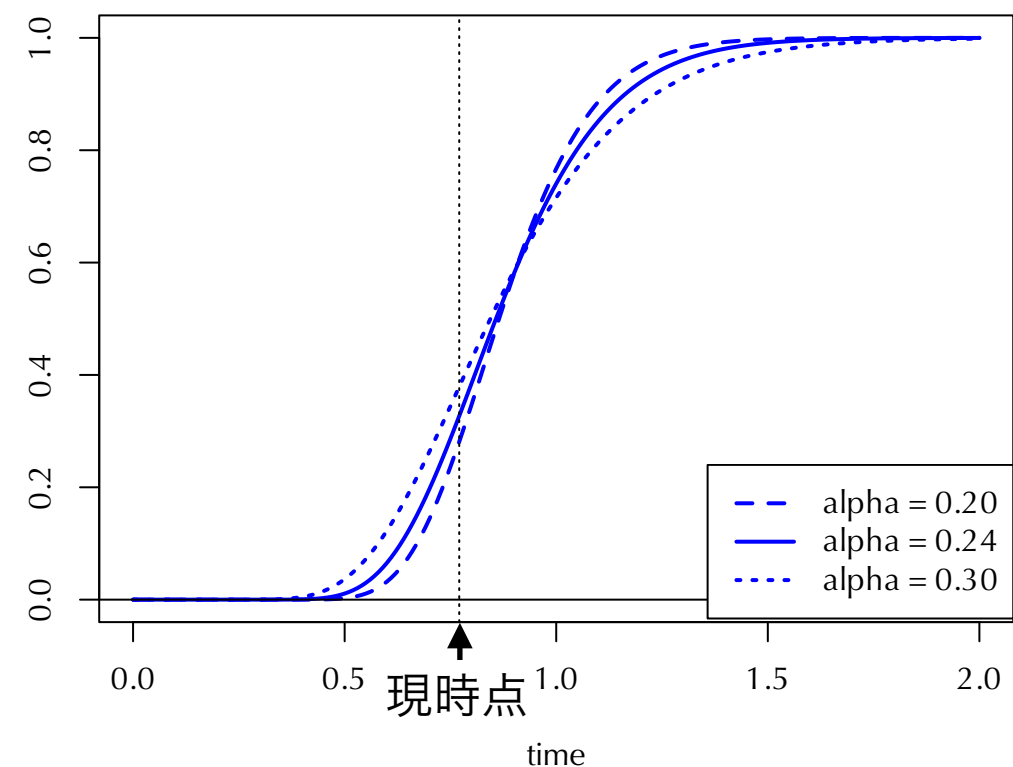
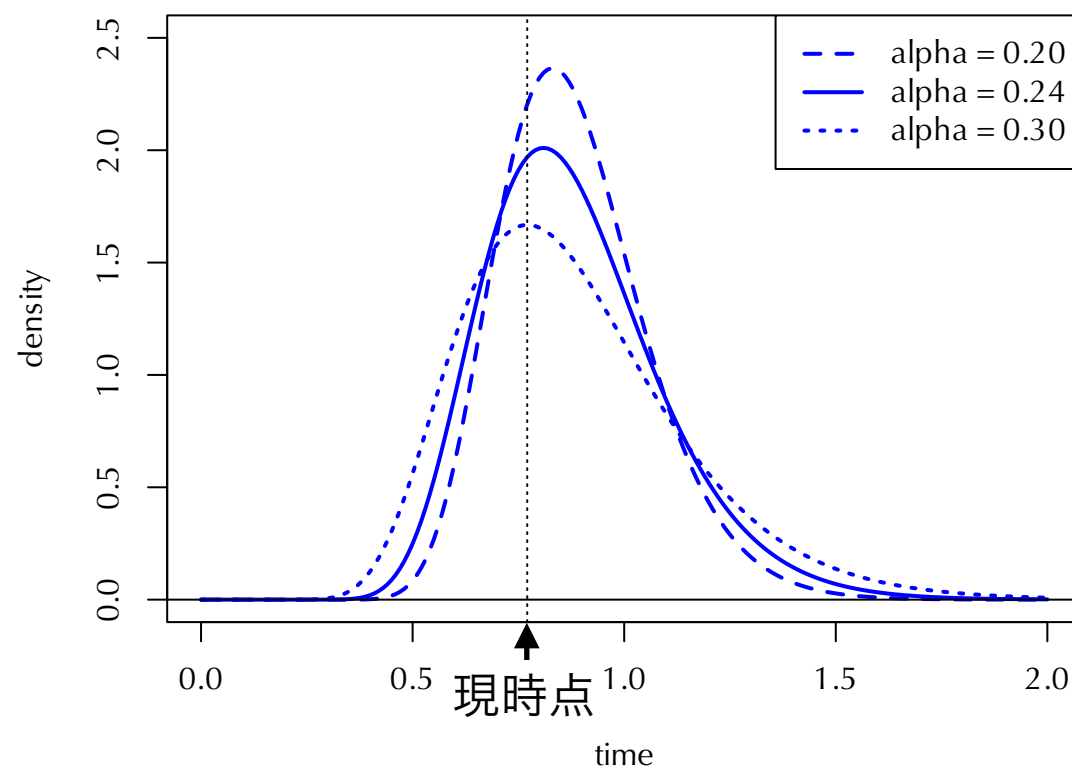
📌 傾き $\hat{\beta}_{\text{OLD}} = T_2/U_1 = 0.7671 \Rightarrow \hat{T}_3^{(\text{OLD})} = \hat{\beta}_{\text{OLD}}U_2 = 0.8822$

時間予測モデルと推定

現時点 = 2024年1月1日

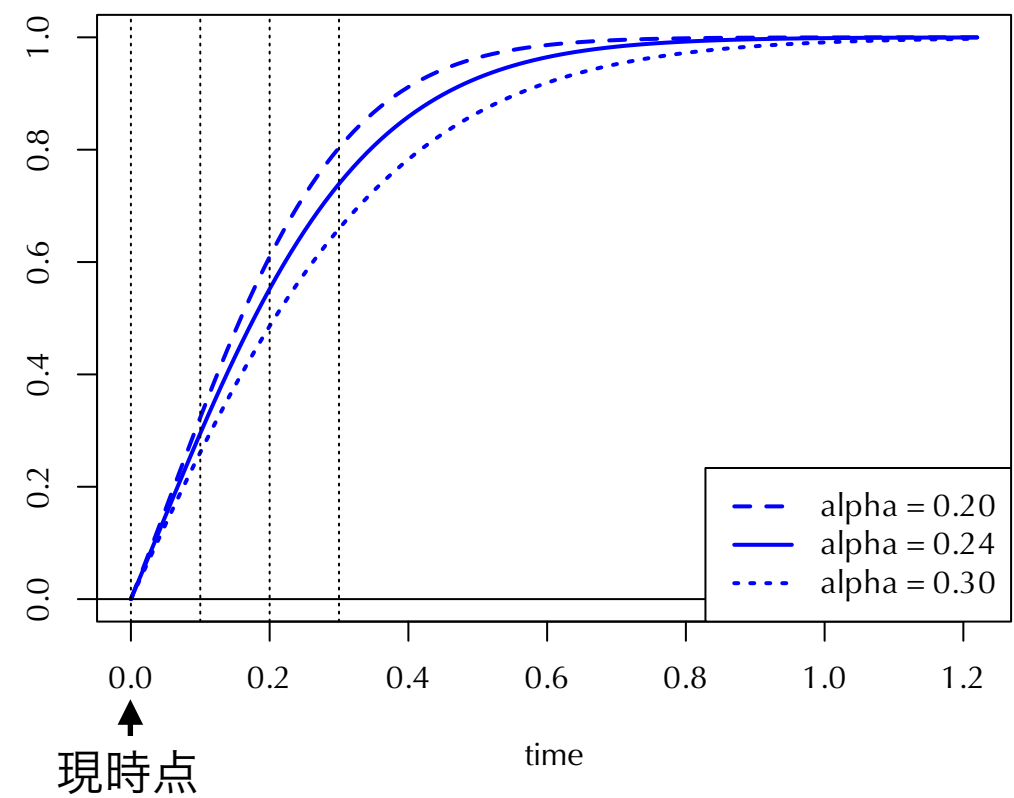
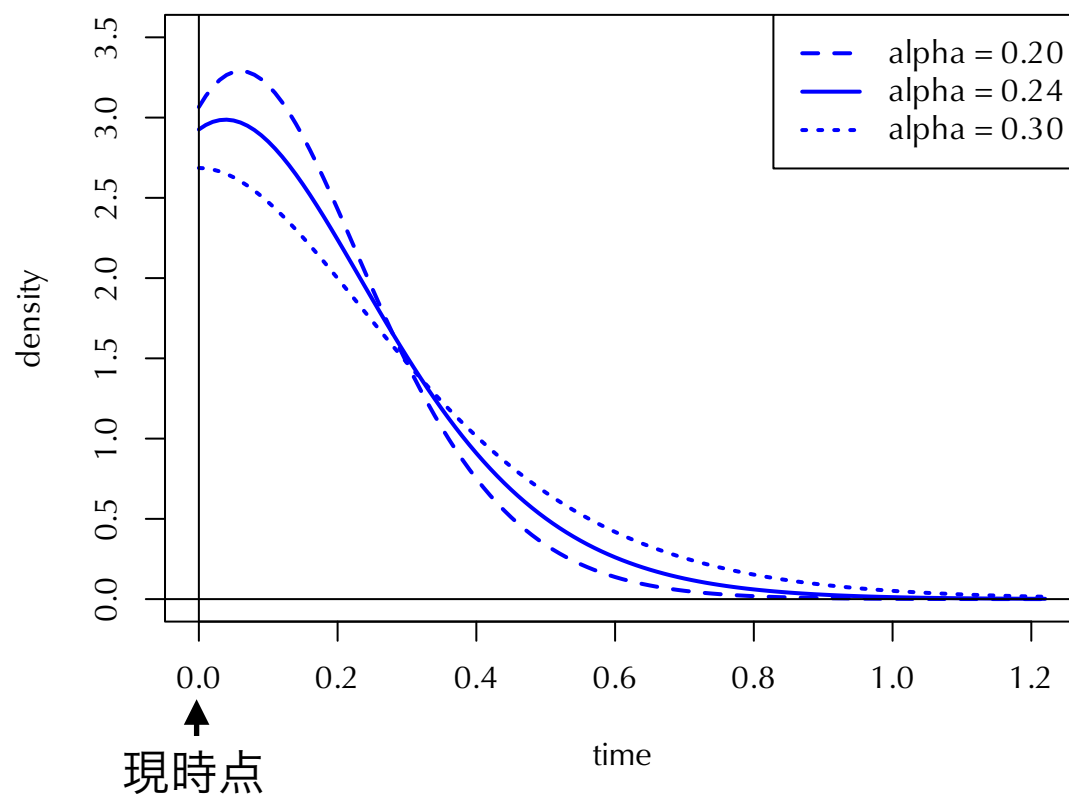
- ▶ 現状の評価では, 時間予測モデルによる推定後, 確率評価をする際にBPTモデル (逆ガウス分布) を用いている.
- ▶ 平均 $\mu = \hat{T}_{i+1}^{(\text{OLD})}$, 変動係数 $\alpha = 0.24$ の逆ガウス分布
- ▶ 実際のデータに適用し, 次の活動までの時間を評価する.

📌 予測分布 ($\alpha = 0.20, 0.24, 0.30$)



時間予測モデルと推定

- ▶ 現状の評価では, 時間予測モデルによる推定後, 確率評価をする際にBPTモデル (逆ガウス分布) を用いている.
 - ▶ 平均 $\mu = \hat{T}_{i+1}^{(\text{OLD})}$, 変動係数 $\alpha = 0.24$ の逆ガウス分布
 - ▶ 実際のデータに適用し, 次の活動までの時間を評価する.
- 📌 条件付き予測分布 ($\alpha = 0.20, 0.24, 0.30$)



時間予測モデルと BPTモデルの接点 (SSD-BPT model)

参考文献:

Ogata, Y. (2002). Slip-size-dependent renewal processes and Bayesian inferences for uncertainties, *Journal of Geophysical Research*, **107**(B11), 2268, doi:10.1029/2001JB000668.

逆ガウス分布（BPTモデル）

- ▶ 逆ガウス分布 $IG(\mu, \alpha^2)$ を以下で定義する.

$$f_{IG}(t \mid \mu, \alpha) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi\alpha^2 t^3}} \exp \left\{ -\frac{(t - \mu)^2}{2\alpha^2 \mu t} \right\} \quad (t > 0, \mu > 0, \alpha > 0)$$

- ▶ **問題点: 時間予測モデルとの整合性がない**

- 📍 時間予測モデルで推定した間隔を平均 μ に代入し,
BPTモデルで確率の評価を行っている.

- 📍 2つのモデルの関連が考慮されていない.

- ▶ **解決策: 時間予測モデルとBPTモデルの関連を考える!**

- 📍 時間予測モデルと背後の確率過程モデルの関連から
自然なモデルが導出できる!

逆ガウス分布（BPTモデル）とブラウン運動

- 標準ブラウン運動 W_t を用いて, 以下の確率過程を考える

$$X_0 = 0, \quad X_t = \eta t + \sigma W_t, \quad \eta, \sigma > 0$$

- T_τ : 閾値 τ に初めて到達するまでにかかる時間

$$T_\tau := \inf\{t > 0 \mid X_t = \tau\} \sim \text{IG}\left(\frac{\tau}{\eta}, \frac{\sigma^2}{\eta\tau}\right)$$

- 各地震で閾値 τ が隆起量 u と関連していると仮定する

-  時間予測モデルとの整合性を考える:

$$\beta u_{i-1} = \mathbb{E}[T_i \mid U_{i-1} = u_{i-1}] = \mathbb{E}[T_{\tau_i}] = \frac{\tau_i}{\eta}$$

-  閾値 τ が隆起量 u と比例関係にあることを仮定: $u = a\tau$

-  記号の煩雑さを避けるため, 隆起量と間隔のindexを揃える.

逆ガウス分布（BPTモデル）とブラウン運動

- 標準ブラウン運動 W_t を用いて, 以下の確率過程を考える

$$X_0 = 0, \quad X_t = \eta t + \sigma W_t, \quad \eta, \sigma > 0$$

- T_τ : 閾値 τ に初めて到達するまでにかかる時間

$$T_\tau := \inf\{t > 0 \mid X_t = \tau\} \sim \text{IG} \left(\frac{\tau}{\eta}, \frac{\sigma^2}{\eta\tau} \right)$$

- 各地震で閾値 τ が隆起量 u と関連していると仮定する

📌 逆ガウス回帰（時間予測BPT）モデルを得る.

$$T_i \sim \text{IG} \left(\beta u_i, \frac{\beta \gamma^2}{u_i} \right), \quad \gamma := a\sigma$$

📌 Ogata (2002, JGR) では, SSD-BPTモデルと呼ばれている.

時間予測BPTモデル

- ▶ 各地震で閾値 τ が隆起量 u と関連していると仮定する
 - 📌 逆ガウス回帰（時間予測BPT）モデルを得る.

$$T_i \sim \text{IG} \left(\beta u_i, \frac{\beta \gamma^2}{u_i} \right), \quad \gamma := a\sigma$$

- 📌 Ogata (2002, JGR) では, SSD-BPTモデルと呼ばれている.
- ▶ 現時点で, 南海トラフ地震が発生していないというデータ
 - 📌 $Y_3 = \mathbb{1}(T_3 \leq t) = 0$ というデータも用いて推定する

$$Y_3 = \mathbb{1}(T_3 \leq t) \sim \text{Ber}(q(t, \beta, u_3, \gamma)),$$

$$q(t, \beta, u_3, \gamma) := P(T_3 \leq t \mid U_3 = u_3) = F_{\text{IG}}(t \mid \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3)$$

時間予測BPTモデルと最尤推定（不確実性の考慮なし）

観測データ（1単位 = 100年 = 36500日）

発生日	i	O	T	U
1707年10月28日	0	0	—	—
1854年12月23日	1	1.472521	1.472521	1.8
1946年12月21日	2	2.393068	0.920548	1.2
—	3	—	—	1.15

[34] From Table 6 we see that the MAP and posterior mean estimates for SSD lognormal and SSD-BPT models are similar for μ and ν but vary greatly for σ , respectively. This is due to the fact that both the posterior distributions are almost symmetric with respect to μ and ν , while they are asymmetric and heavy tailed with respect to the scaling parameter σ . Furthermore, the MAP estimates of σ of SSD lognormal and SSD-BPT models are very small due to the fact that the ratios $\{(t_i - t_{i-1})/\xi_{i-1}; i = 2, 3\}$ are almost equal to one another. The MLE is almost the same as the MAP

推定結果

📍 推定値: $(\hat{\beta}_{\text{MLE}}, \hat{\gamma}_{\text{MLE}}) = (0.7982, 0.0637)$

📍 予測分布

$$T_3 \sim \text{IG} \left(\hat{\beta}_{\text{MLE}} \times u_3, \frac{\hat{\beta}_{\text{MLE}} \hat{\gamma}_{\text{MLE}}^2}{u_3} \right) = \text{IG} (0.9179, 0.0531^2)$$

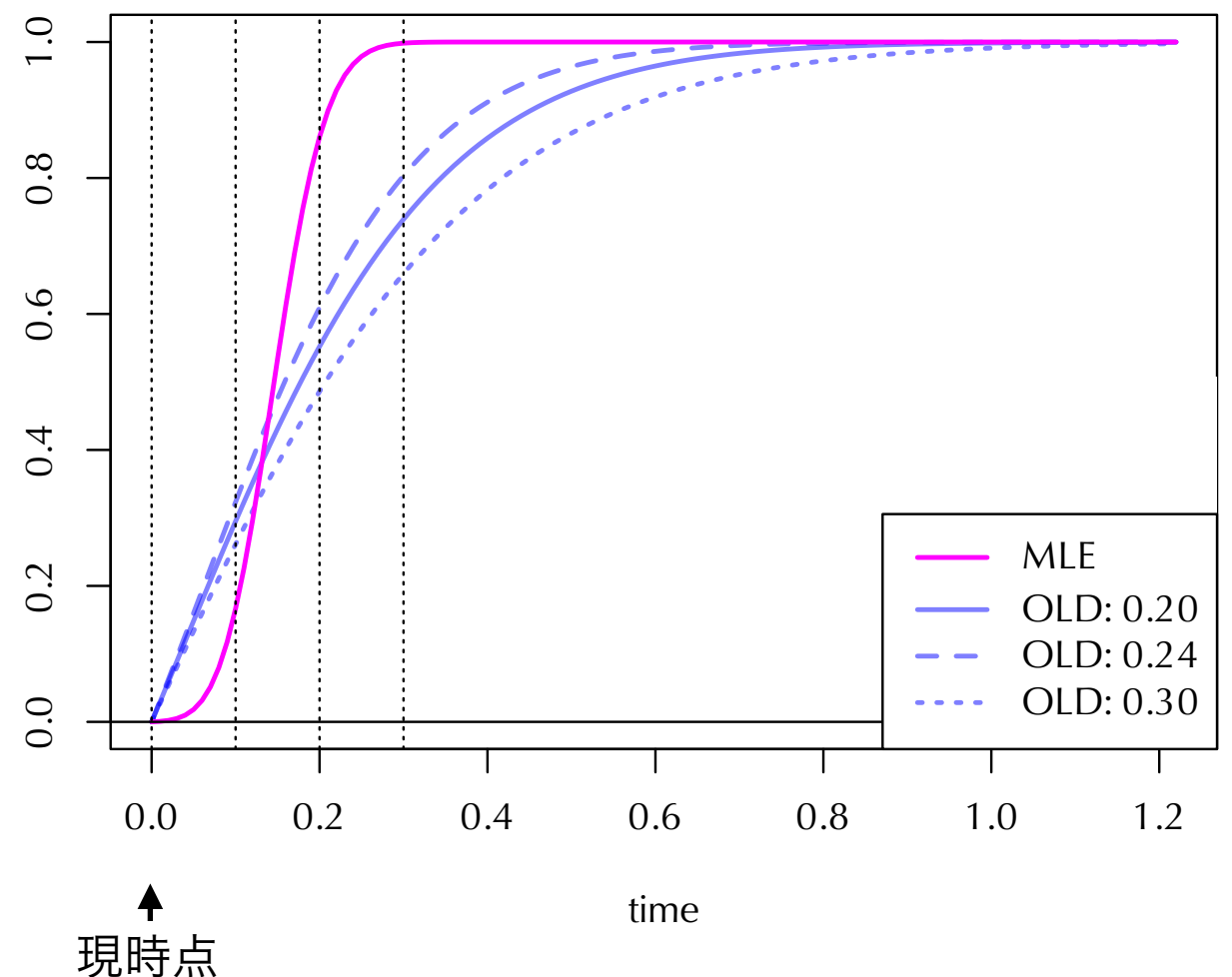
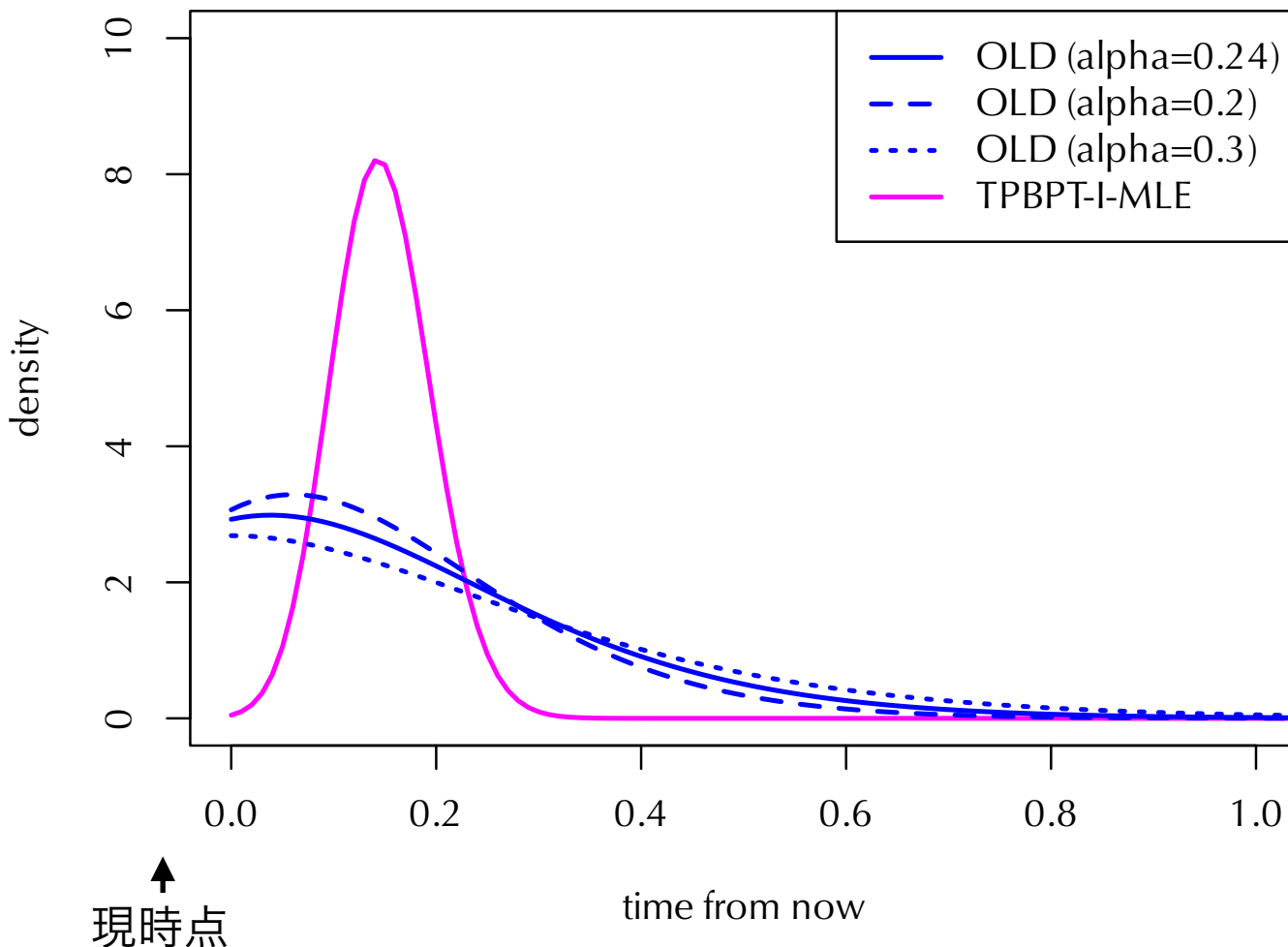
📍 Ogata (2002)と同様に、変動係数が小さく推定される。

時間予測BPTモデルと最尤推定（不確実性の考慮なし）

▶ 推定結果（1単位 = 100年 = 36500日）

📌 変動係数が小さく推定 ⇒ **平均周りに集中**

CPD



現時点 = 2024年1月1日

時間予測BPT (SSD-BPT) モデル と不確実性を考慮したベイズ推定

参考文献:

Ogata, Y. (2002). Slip-size-dependent renewal processes and Bayesian inferences for uncertainties, *Journal of Geophysical Research*, **107**(B11), 2268, doi:10.1029/2001JB000668.

時間予測BPTモデル

▶ 時間予測BPT (SSD-BPT) モデル

- 📌 逆ガウス回帰（時間予測BPT）モデルを得る.

$$T_i \sim \text{IG} \left(\beta u_i, \frac{\beta \gamma^2}{u_i} \right), \quad \gamma := a\sigma$$

▶ 現時点で, 南海トラフ地震が発生していないというデータ

- 📌 $Y_3 = \mathbb{1}(T_3 \leq t) = 0$ というデータも用いて推定する

$$Y_3 = \mathbb{1}(T_3 \leq t) \sim \text{Ber}(q(t, \beta, u_3, \gamma)),$$

$$q(t, \beta, u_3, \gamma) := P(T_3 \leq t \mid U_3 = u_3) = F_{\text{IG}}(t \mid \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3)$$

▶ さらに, 隆起量の不確実性も合わせて, ベイズ推定を考える!

時間予測BPTモデルのベイズ推定（不確実性を考慮）

▶ 隆起量の不確実性を確率分布で表現する！

🔊 隆起量を局外母数と考え、事前分布を考える。

🔊 宝永地震と安政地震の隆起量の不確実性を表す分布

$$U_1 \sim p_{U_1}, \quad U_2 \sim p_{U_2}, \quad \mathbf{U}_2 = (U_1, U_2)^\top$$

▶ パラメータ $\theta = (\beta, \gamma)^\top$ の事前分布 p_θ とする

▶ 不確実性を考慮したベイズ推定における観測データ

🔊 $T_1 = 1.4725$: 宝永から安政までの活動間隔

🔊 $T_2 = 0.9205$: 安政から昭和までの活動間隔

🔊 $Y_3 = 0$: 昭和から現在まで活動がないという情報

🔊 $U_3 = 1.15$: 昭和地震の隆起量（一旦、不確実性を考えない）

時間予測BPTモデルのベイズ推定 (不確実性を考慮)

- パラメータ $\theta = (\beta, \gamma)^\top$ と隆起量 $U_2 = (U_1, U_2)^\top$ の事後分布

$$\begin{aligned} p(\theta, \mathbf{u}_2 \mid T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, U_3 = u_3) \\ \propto \underbrace{\{1 - q(t, \beta, u_3, \gamma)\} f_{\text{IG}}(t_1 \mid \beta u_1, \beta \gamma^2 / u_1) f_{\text{IG}}(t_2 \mid \beta u_2, \beta \gamma^2 / u_2)}_{\text{prior}} \\ \times p_\theta(\theta) p_{U_1}(u_1) p_{U_2}(u_2) \end{aligned} \quad \uparrow \text{尤度}$$

ここで, $\mathbf{T}_2 := (T_1, T_2)^\top$, $\mathbf{t}_2 = (1.4725, 0.9205)^\top$, $u_3 = 1.15$ である.

- 事後分布に関して, 予測モデル (BPT分布) を平均化することで, T_3 の事後予測分布を考えることができる.

$$\begin{aligned} p_{\text{pp}}^{(\text{IG})}(t_3 \mid T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, U_3 = u_3) \\ = \int \int f_{\text{IG}}(t_3 \mid \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3) p(\theta, \mathbf{u}_2 \mid T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, U_3 = u_3) d\theta d\mathbf{u}_2 \end{aligned} \quad \downarrow \text{事後分布}$$

時間予測BPTモデルのベイズ推定 (不確実性を考慮)

- ▶ 予測に逆ガウス分布を使った場合,
現時点以前も予測分布において正の確率をもつ.
- ▶ **切断逆ガウス分布**を用いた予測分布を考える.

$$f_{\text{TIG}}(t_3 \mid t, \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3) = \frac{f_{\text{IG}}(t_3 \mid \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3)}{1 - F_{\text{IG}}(t \mid \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3)}$$



$$\begin{aligned} & p_{\text{pp}}^{(\text{TIG})}(t_3 \mid T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, U_3 = u_3) \\ &= \int \int \underbrace{f_{\text{TIG}}(t_3 \mid t, \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3)}_{\substack{\uparrow \text{予測モデル}}} \underbrace{p(\theta, \mathbf{u}_2 \mid T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, U_3 = u_3)}_{\substack{\downarrow \text{事後分布}}} d\theta d\mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

時間予測BPTモデルのベイズ推定（不確実性を考慮）

- ▶ **切断逆ガウス分布**を用いた予測分布を考える.

$$p_{\text{pp}}^{(\text{TIG})}(t_3 \mid T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, U_3 = u_3)$$

↓ 事後分布

$$= \int \int \underbrace{f_{\text{TIG}}(t_3 \mid t, \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3)}_{\substack{\uparrow \text{予測モデル}}} \underbrace{p(\theta, \mathbf{u}_2 \mid T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, U_3 = u_3)}_{\text{事後分布}} d\theta d\mathbf{u}_2$$

- ▶ 事後予測分布は事後分布に関するモデルの平均
⇒ 95%信用区間でバラツキも評価してみる

$$(\beta^{(j)}, \gamma^{(j)}) \sim p(\beta, \gamma \mid T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, U_3 = u_3)$$



$$f_{\text{TIG}}(t_3 \mid t, \beta^{(j)} u_3, \beta^{(j)} (\gamma^{(j)})^2 / u_3)$$

時間予測BPTモデルのベイズ推定（不確実性を考慮）

▶ 事後予測分布による評価の例

- 📌 隆起量の不確実性に一様分布を仮定:

$$U_1 \sim \text{Unif}(1.4, 2.4), U_2 \sim \text{Unif}(1.0, 1.4)$$

- 📌 回帰パラメータの不確実性に正規分布 & 一様分布を仮定

$$\beta \sim N(0.8, 0.05^2), \gamma \sim \text{Unif}(0.08, 0.3)$$

▶ 注意点

- 📌 上述の事前分布はあくまでも例として設定
- 📌 事前分布の設定により, 信用区間の幅は異なる
- 📌 観測データが少ないため, 周辺尤度に基づく
経験ベイズ的な事前分布の決定が難しい可能性

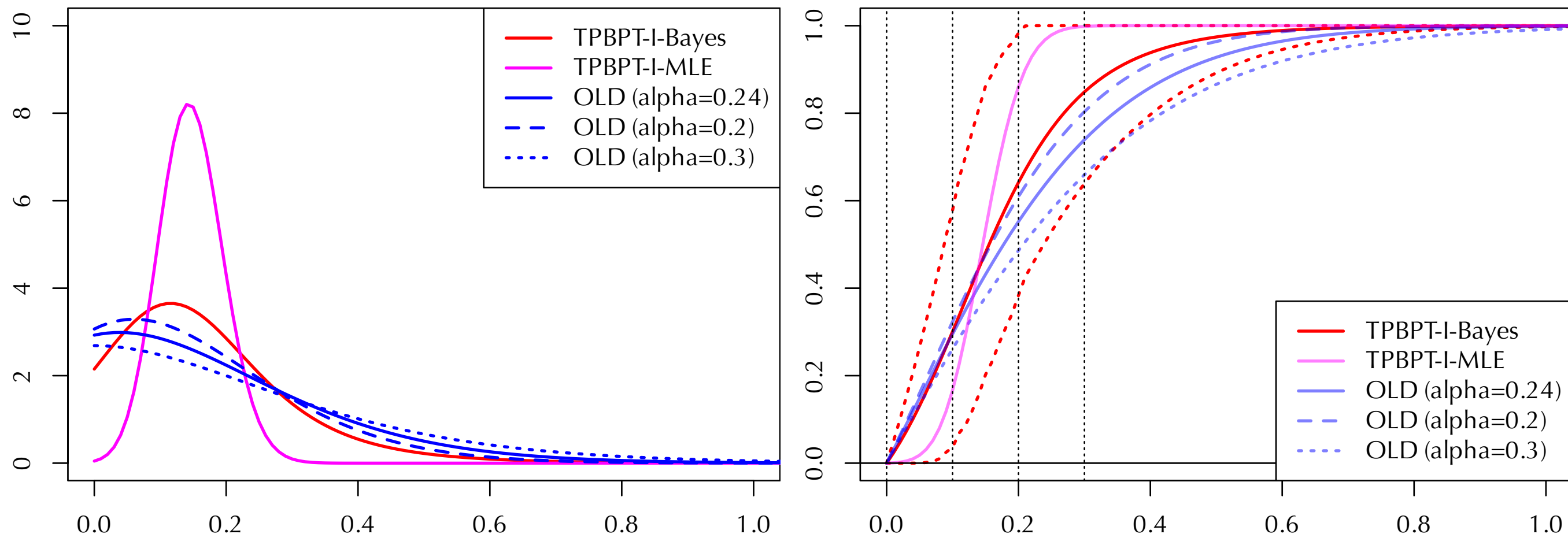
時間予測BPTモデルのベイズ推定 (不確実性を考慮)

▶ 事後予測分布による評価の例

📌 隆起量の不確実性に一様分布を仮定:

$$U_1 \sim \text{Unif}(1.4, 2.4), U_2 \sim \text{Unif}(1.0, 1.4)$$

📌 回帰パラメータの不確実性に正規分布 & 一様分布を仮定



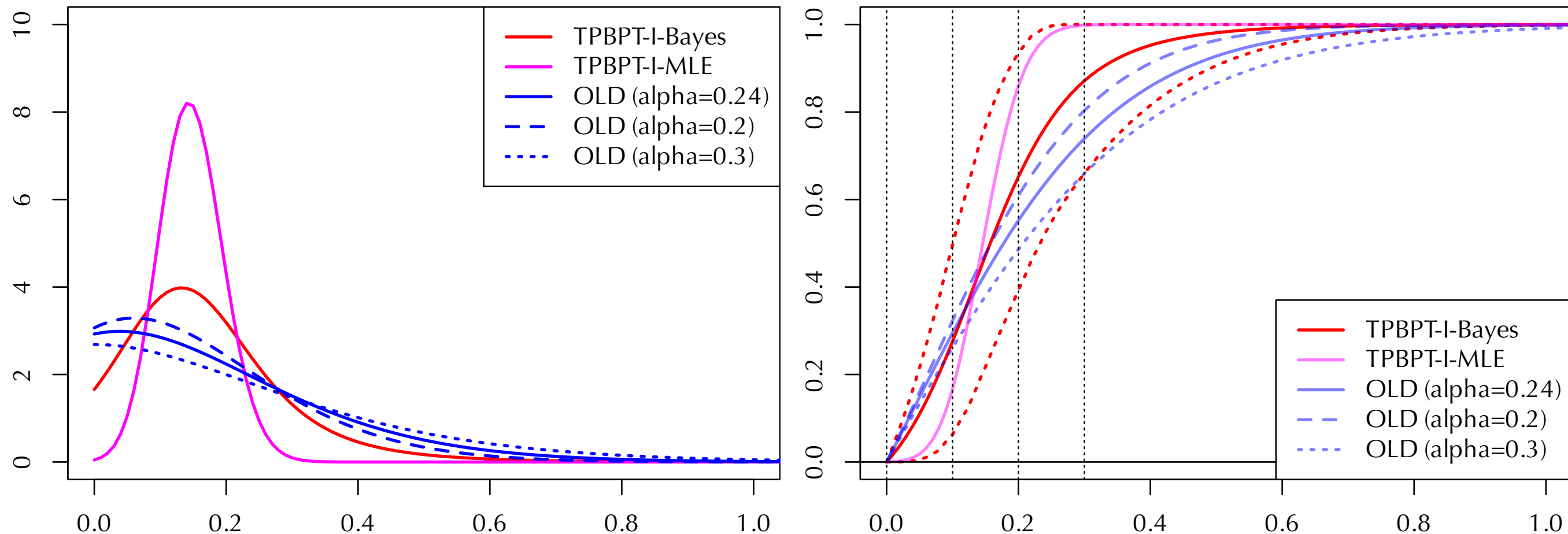
時間予測BPTモデルのベイズ推定

▶ 事後予測分布による評価の例 (不確実性考慮なし; Ogata, 2002)

- 📌 回帰パラメータの不確実性に正規分布 & 一様分布を仮定

$$\beta \sim N(0.8, 0.05^2), \gamma \sim \text{Unif}(0.08, 0.3)$$

- 📌 事前分布は同じ $\Rightarrow$ 不確実性がない分, 確度が高くなる.



時間予測BPTモデルのベイズ推定

- 不確実性考慮なし と 不確実性考慮あり の比較

