

不確実性を考慮した評価方法

～考えられる幾つかの評価方法と時間予測BPTモデル～

TERADA, Yoshikazu / 寺田 吉壺

大阪大学 大学院基礎工学研究科
システム創成専攻 数理科学領域

第2回 長期確率評価手法検討分科会 (第二期)

2024年9月26日 13:30 ~ 15:30

- ▶ **時間予測モデルによるこれまでの評価**
- ▶ **時間予測モデルの不確実性**
 - 📌 隆起量の不確実性の影響を可視化
- ▶ **時間予測モデルとBPTモデルの接点**
 - 📌 逆ガウス分布（BPTモデル）と時間予測モデルとの乖離
 - 📌 逆ガウス分布（BPTモデル）とブラウン運動
 - ⇒ **時間予測BPTモデル (SSD-BPTモデル)**
 - 📌 最尤推定量における不確実性の影響を可視化
- ▶ **時間予測BPTモデルのベイズ推定**
 - 📌 不確実性を考慮しない解析 (Ogata, 2002)
 - 📌 **不確実性を考慮した解析**
 - 📌 **不確実性を考慮した解析の課題**

これまでの評価方法

時間予測モデルと推定

▶ 記号

📌 U_i : i 番目の地震発生時の隆起量, O_i : i 番目の地震発生時刻

📌 $T_i = O_i - O_{i-1}$: 地震発生間隔, $O_0 = 0$ とする.

▶ 時間予測モデル:

📌 U_{i-1} が観測されたという下で, $i-1$ 番目から i 番目の活動までの条件付き期待経過時間に対して以下でモデリング.

$$\mathbb{E}[T_i | U_{i-1}] = \frac{U_{i-1}}{V} = \beta U_{i-1}, \quad \beta := \frac{1}{V}$$

📌 資料では, 1つのデータのみを用いて推定と記述.

$$\hat{\beta}_{\text{OLD}} = T_i / U_{i-1}$$

時間予測モデルと推定

記号

- 📌 U_i : i 番目の地震発生時の隆起量, O_i : i 番目の地震発生時刻
- 📌 $T_i = O_i - O_{i-1}$: 地震発生間隔, $O_0 = 0$ とする.

時間予測モデル:

- 📌 U_i が与えられた下での, 条件付き期待値を以下で推定.

$$\hat{T}_{i+1}^{(\text{OLD})} = (O_i - O_{i-1})U_i / U_{i-1} = \underbrace{\frac{T_i}{U_{i-1}}}_{=\hat{\beta}_{\text{OLD}}} \times U_i$$

- 📌 最小二乗法でも推定可能.

$$\hat{\beta}_{\text{OLS}} = \frac{\sum_{i=2}^n T_i U_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n-1} U_i^2}$$

時間予測モデルと推定

- ▶ 現状の評価では, 時間予測モデルによる推定後, 確率評価をする際にBPTモデル (逆ガウス分布) を用いている.
- ▶ 平均 $\mu = \hat{T}_{i+1}^{(\text{OLD})}$, 変動係数 $\alpha = 0.24$ の逆ガウス分布
- ▶ 実際のデータに適用し, 次の活動までの時間を評価する.
 - 📍 100年を1単位とした以下のデータを用いる.

発生日	i	0	T	U
1707年10月28日	0	0	-	1.8
1854年12月23日	1	1.472521	1.47252	1.2
1946年12月21日	2	2.393068	0.92055	1.15

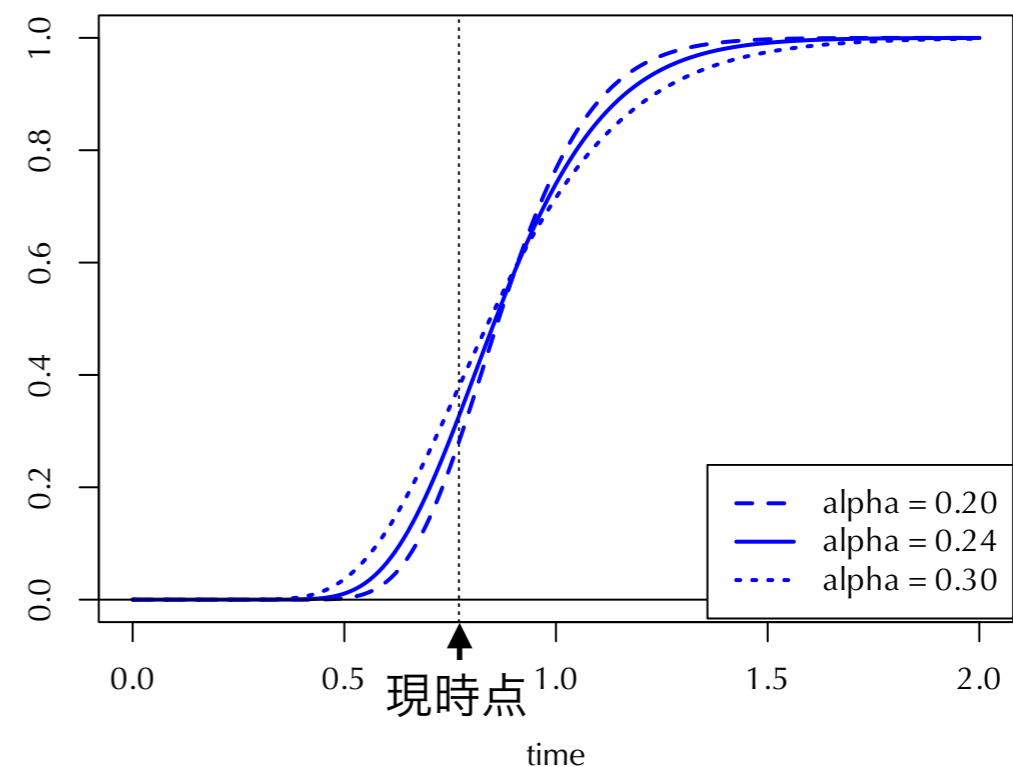
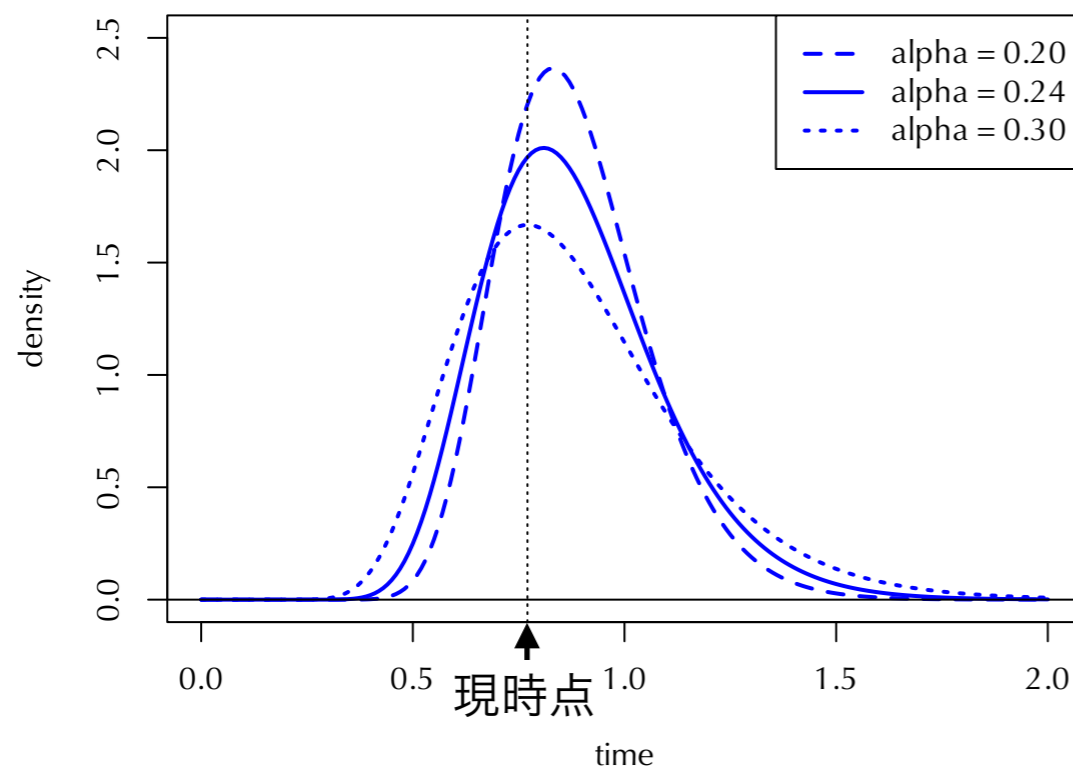
📍 傾き $\hat{\beta}_{\text{OLD}} = T_2/U_1 = 0.7671 \Rightarrow \hat{T}_3^{(\text{OLD})} = \hat{\beta}_{\text{OLD}}U_2 = 0.8822$

時間予測モデルと推定

現時点 = 2024年1月1日

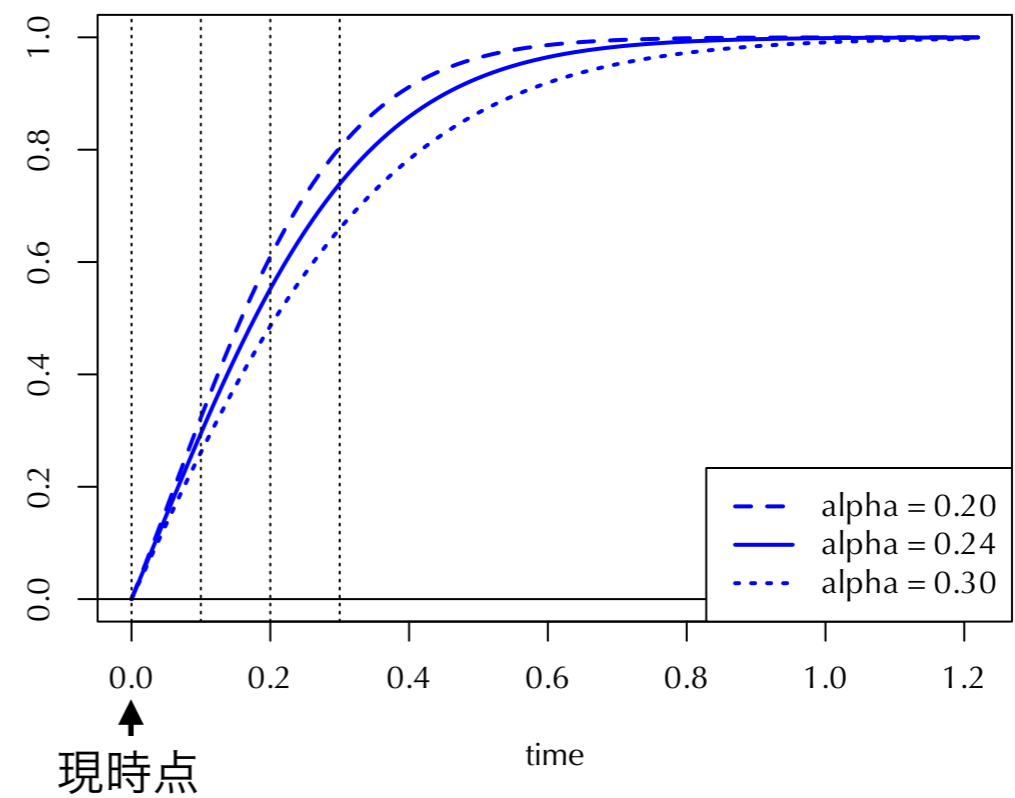
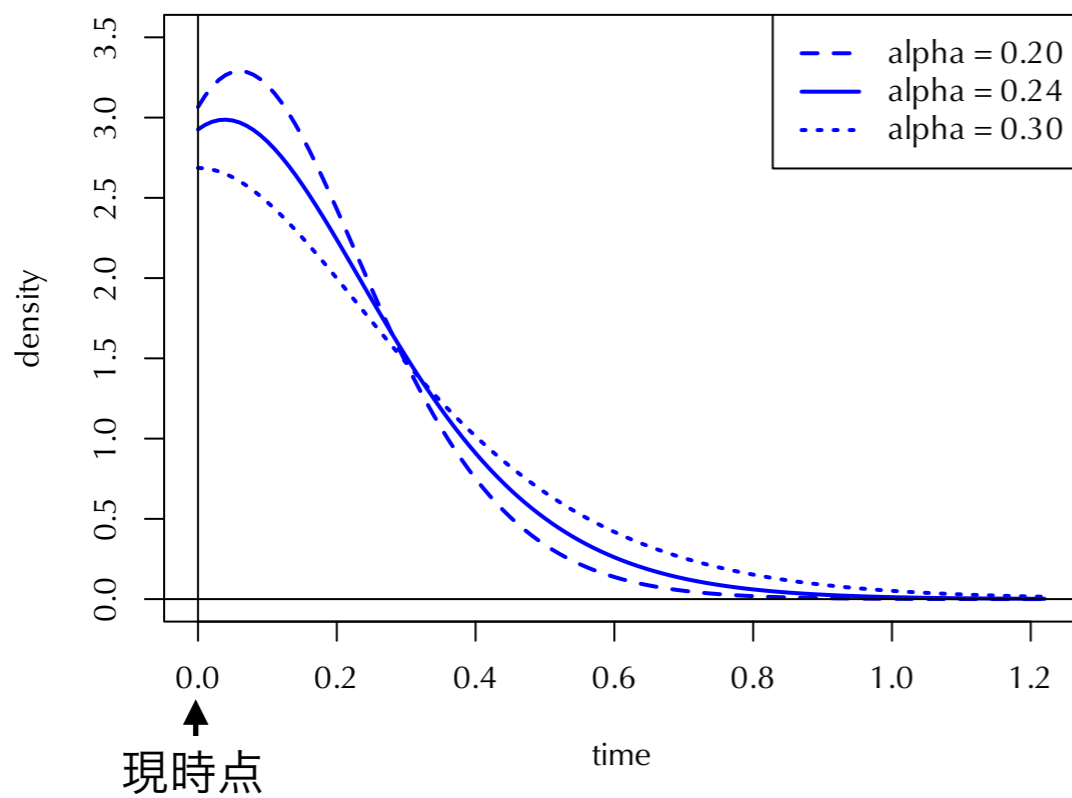
- ▶ 現状の評価では, 時間予測モデルによる推定後, 確率評価をする際にBPTモデル (逆ガウス分布) を用いている.
- ▶ 平均 $\mu = \hat{T}_{i+1}^{(OLD)}$, 変動係数 $\alpha = 0.24$ の逆ガウス分布
- ▶ 実際のデータに適用し, 次の活動までの時間を評価する.

📌 予測分布 ($\alpha = 0.20, 0.24, 0.30$)



時間予測モデルと推定

- ▶ 現状の評価では, 時間予測モデルによる推定後, 確率評価をする際にBPTモデル (逆ガウス分布) を用いている.
 - ▶ 平均 $\mu = \hat{T}_{i+1}^{(OLD)}$, 変動係数 $\alpha = 0.24$ の逆ガウス分布
 - ▶ 実際のデータに適用し, 次の活動までの時間を評価する.
- 📌 条件付き予測分布 ($\alpha = 0.20, 0.24, 0.30$)



時間予測モデルの不確実性

時間予測モデルと隆起量の不確実性

▶ 隆起量の不確実性を確率分布として表現

📍 宝永地震の隆起量: 1.4 ~ 2.4 m

📍 安政地震の隆起量にも, **仮に**1.0 ~ 1.4 mと不確実性を考慮.

▶ 予測分布のばらつきを考えてみる (α は 0.24 で固定)

📍 $U_1 \sim \text{Unif}(1.0, 1.4)$: 一様分布を考える.

📍 U_1 に依存して, 予測分布がランダムに変化

📍 **条件つき予測分布のばらつきを考慮してみる.**

$$P_{\text{IG}}(T_3 \leq s \mid T_3 \geq t, U_1)$$

📍 一様分布から乱数 U_1 を生成し, 上述の条件付き確率を計算.

📍 繰り返し数 = 10^4 として, 95%最高密度区間*を計算.

最高密度区間 (HDI: Highest Density Interval)

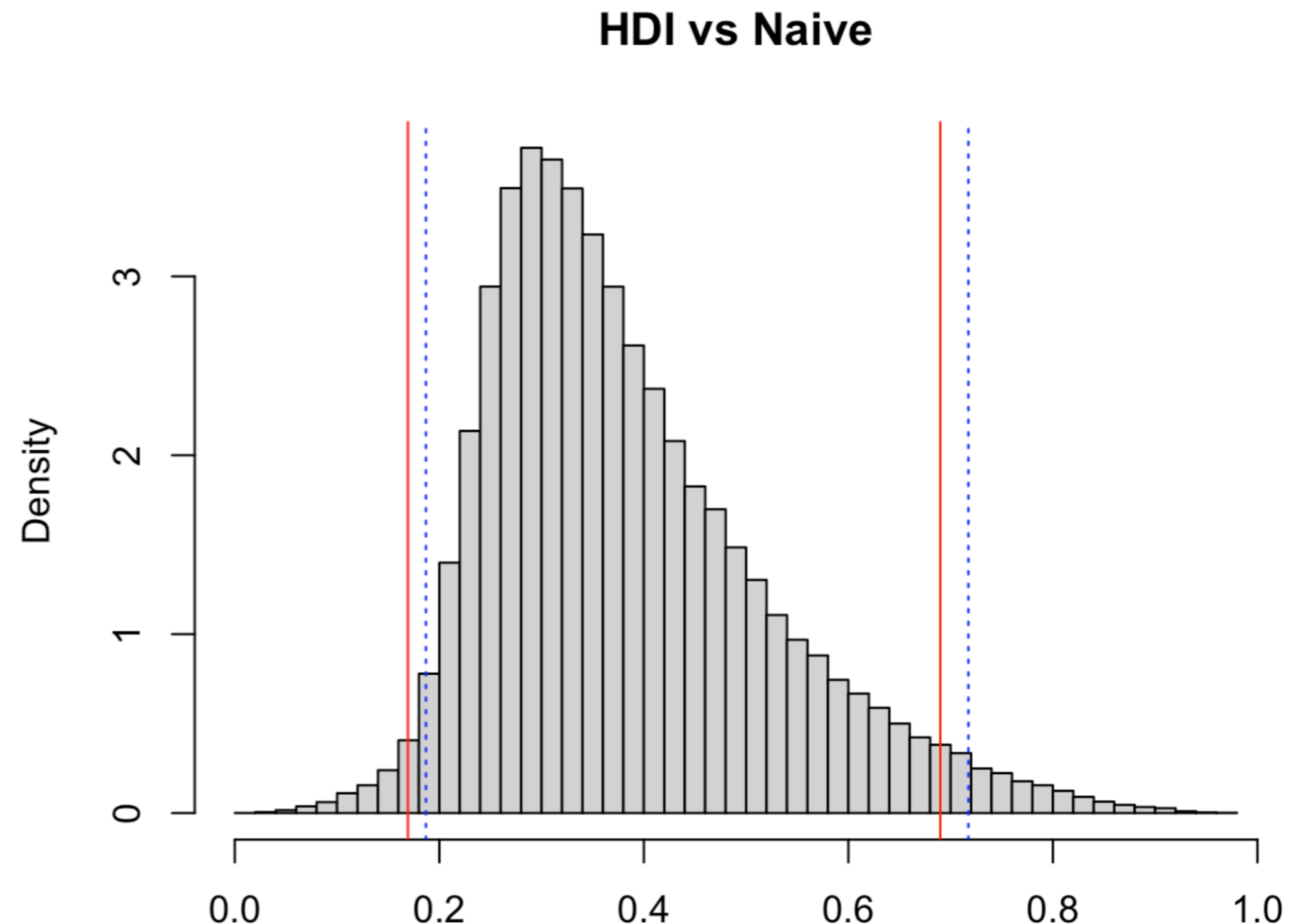
- ▶ 95%信頼区間や信用区間は, 簡便に下側と上側の2.5%点から構成
- ▶ しかし, 非対称な分布の場合は, 不必要に区間が長くなる可能性
- ▶ 被覆確率95%のできるだけ小さい区間を計算したい

⇒ 最高密度区間!

- ▶ R package bayestestR
の関数hdiを用いて計算

▶ 赤: HDI

▶ 青: 簡便法



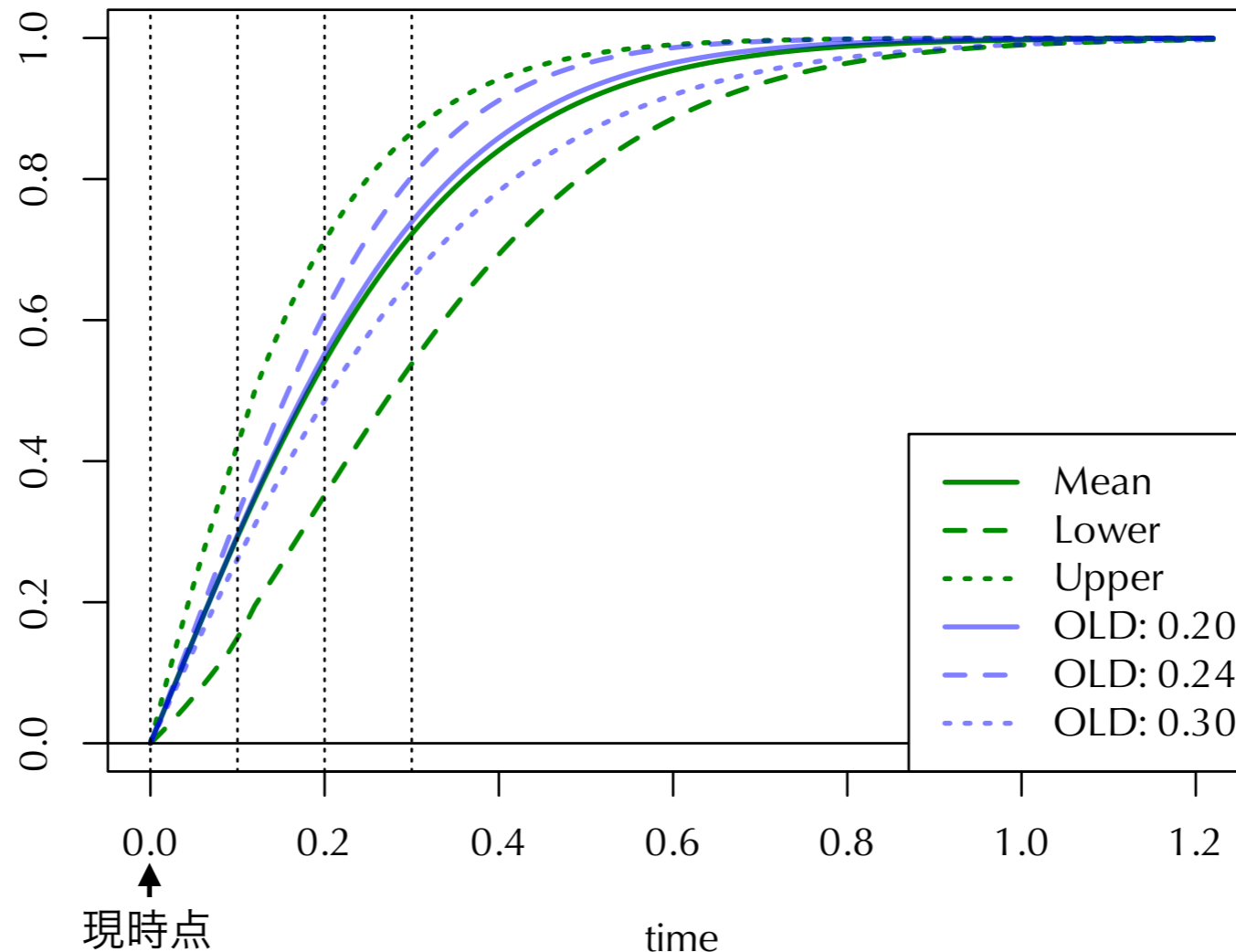
時間予測モデルと隆起量の不確実性

$$P_{IG}(T_3 \leq s \mid T_3 \geq t, U_1)$$

▶ 条件付き予測分布の95%信用区間 (HDI)

📍 $U_1 \sim \text{Unif}(1.0, 1.4)$: 隆起量の不確実性に, 一様分布を考える.

現時点 = 2024年1月1日



時間予測モデルと BPTモデルの接点 (SSD-BPT model)

参考文献:

Ogata, Y. (2002). Slip-size-dependent renewal processes and Bayesian inferences for uncertainties, *Journal of Geophysical Research*, **107**(B11), 2268, doi:10.1029/2001JB000668.

逆ガウス分布 (BPTモデル)

- ▶ 逆ガウス分布 $IG(\mu, \alpha^2)$ を以下で定義する.

$$f_{IG}(t | \mu, \alpha) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi\alpha^2 t^3}} \exp\left\{-\frac{(t - \mu)^2}{2\alpha^2 \mu t}\right\} \quad (t > 0, \mu > 0, \alpha > 0)$$

- ▶ **問題点: 時間予測モデルとの整合性がない**

- 📍 時間予測モデルで推定した間隔を平均 μ に代入し,
BPTモデルで確率の評価を行っている.
- 📍 2つのモデルの関連が考慮されていない.

- ▶ **解決策: 時間予測モデルとBPTモデルの関連を考える!**

- 📍 時間予測モデルと背後の確率過程モデルの関連から
自然なモデルが導出できる!

逆ガウス分布 (BPTモデル) とブラウン運動

- ▶ 標準ブラウン運動 W_t を用いて, 以下の確率過程を考える

$$X_0 = 0, \quad X_t = \eta t + \sigma W_t, \quad \eta, \sigma > 0$$

- ▶ T_τ : 閾値 τ に初めて到達するまでにかかる時間

$$T_\tau := \inf\{t > 0 \mid X_t = \tau\} \sim \text{IG} \left(\frac{\tau}{\eta}, \frac{\sigma^2}{\eta\tau} \right)$$

- ▶ 各地震で閾値 τ が隆起量 u と関連していると仮定する

- 🔗 時間予測モデルとの整合性を考える:

$$\beta u_{i-1} = \mathbb{E}[T_i \mid U_{i-1} = u_{i-1}] = \mathbb{E}[T_{\tau_i}] = \frac{\tau_i}{\eta}$$

- 🔗 閾値 τ が隆起量 u と比例関係にあることを仮定: $u = a\tau$

- 🔗 記号の煩雑さを避けるため, 隆起量と間隔のindexを揃える.

逆ガウス分布（BPTモデル）とブラウン運動

- ▶ 標準ブラウン運動 W_t を用いて、以下の確率過程を考える

$$X_0 = 0, \quad X_t = \eta t + \sigma W_t, \quad \eta, \sigma > 0$$

- ▶ T_τ : 閾値 τ に初めて到達するまでにかかる時間

$$T_\tau := \inf\{t > 0 \mid X_t = \tau\} \sim \text{IG} \left(\frac{\tau}{\eta}, \frac{\sigma^2}{\eta\tau} \right)$$

- ▶ 各地震で閾値 τ が隆起量 u と関連していると仮定する

📌 逆ガウス回帰（時間予測BPT）モデルを得る。

$$T_i \sim \text{IG} \left(\beta u_i, \frac{\beta \gamma^2}{u_i} \right), \quad \gamma := a\sigma$$

📌 Ogata (2002, JGR) では、SSD-BPTモデルと呼ばれている。

Ogata (2002) のSSD-BPTモデルとの同等性

- ▶ 式(14)と逆ガウス分布の関係 (ξ : 隆起量)

$$\begin{aligned} f(x | \xi, \nu, \sigma) &= \frac{\xi}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x^3}} \exp \left\{ -\frac{(\xi - \nu x)^2}{2\sigma^2 x} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{(\xi/\nu)^2}{2\pi(\sigma/\nu)^2 x^3}} \exp \left\{ -\frac{(x - \xi/\nu)^2}{2(\sigma/\nu)^2 x} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\xi/\nu}{2\pi(\sigma/\sqrt{\nu\xi})^2 x^3}} \exp \left\{ -\frac{(x - \xi/\nu)^2}{2(\sigma/\sqrt{\nu\xi})^2 (\xi/\nu)x} \right\} \end{aligned}$$

- ▶ すなわち、本資料のパラメータと以下の対応関係がある。

$$T_i \sim \text{IG} \left(\frac{\xi}{\nu}, \frac{\sigma^2}{\nu\xi} \right) = \text{IG} \left(\beta\xi, \beta\frac{\gamma^2}{\xi} \right), \quad \beta = \frac{1}{\nu}, \quad \gamma = \sigma$$

時間予測BPTモデル

- ▶ 各地震で閾値 τ が隆起量 u と関連していると仮定する
 - 📌 逆ガウス回帰（時間予測BPT）モデルを得る。

$$T_i \sim \text{IG} \left(\beta u_i, \frac{\beta \gamma^2}{u_i} \right), \quad \gamma := a\sigma$$

- 📌 **Ogata (2002, JGR) では, SSD-BPTモデルと呼ばれている。**
- ▶ 現時点で, 南海トラフ地震が発生していないというデータ
 - 📌 $Y_3 = \mathbb{1}(T_3 \leq t) = 0$ というデータも用いて推定する

$$Y_3 = \mathbb{1}(T_3 \leq t) \sim \text{Ber}(q(t, \beta, u_3, \gamma)),$$

$$q(t, \beta, u_3, \gamma) := P(T_3 \leq t \mid U_3 = u_3) = F_{\text{IG}}(t \mid \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3)$$

時間予測BPTモデルと最尤推定（不確実性の考慮なし）

▶ 観測データ（1単位 = 100年 = 36500日）

発生日	i	O	T	U
1707年10月28日	0	0	—	—
1854年12月23日	1	1.472521	1.472521	1.8
1946年12月21日	2	2.393068	0.920548	1.2
—	3	—	—	1.15

[34] From Table 6 we see that the MAP and posterior mean estimates for SSD lognormal and SSD-BPT models are similar for μ and ν but vary greatly for σ , respectively. This is due to the fact that both the posterior distributions are almost symmetric with respect to μ and ν , while they are asymmetric and heavy tailed with respect to the scaling parameter σ . Furthermore, the MAP estimates of σ of SSD lognormal and SSD-BPT models are very small due to the fact that the ratios $\{(t_i - t_{i-1})/\xi_{i-1}; i = 2, 3\}$ are almost equal to one another. The MLE is almost the same as the MAP

▶ 推定結果

📍 推定値: $(\hat{\beta}_{MLE}, \hat{\gamma}_{MLE}) = (0.7982, 0.0637)$

📍 予測分布

$$T_3 \sim \text{IG} \left(\hat{\beta}_{MLE} \times u_3, \frac{\hat{\beta}_{MLE} \hat{\gamma}_{MLE}^2}{u_3} \right) = \text{IG} (0.9179, 0.0531^2)$$

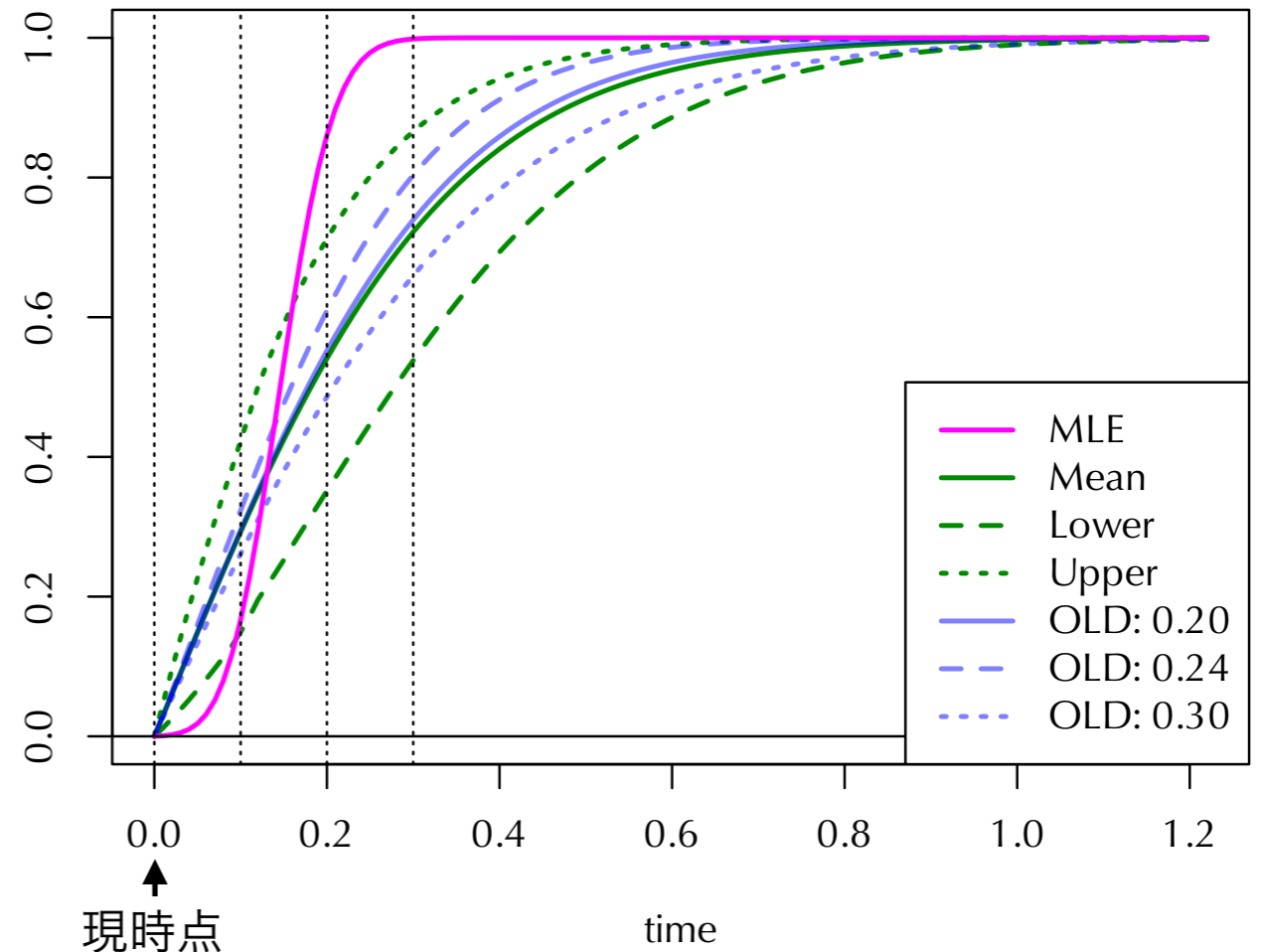
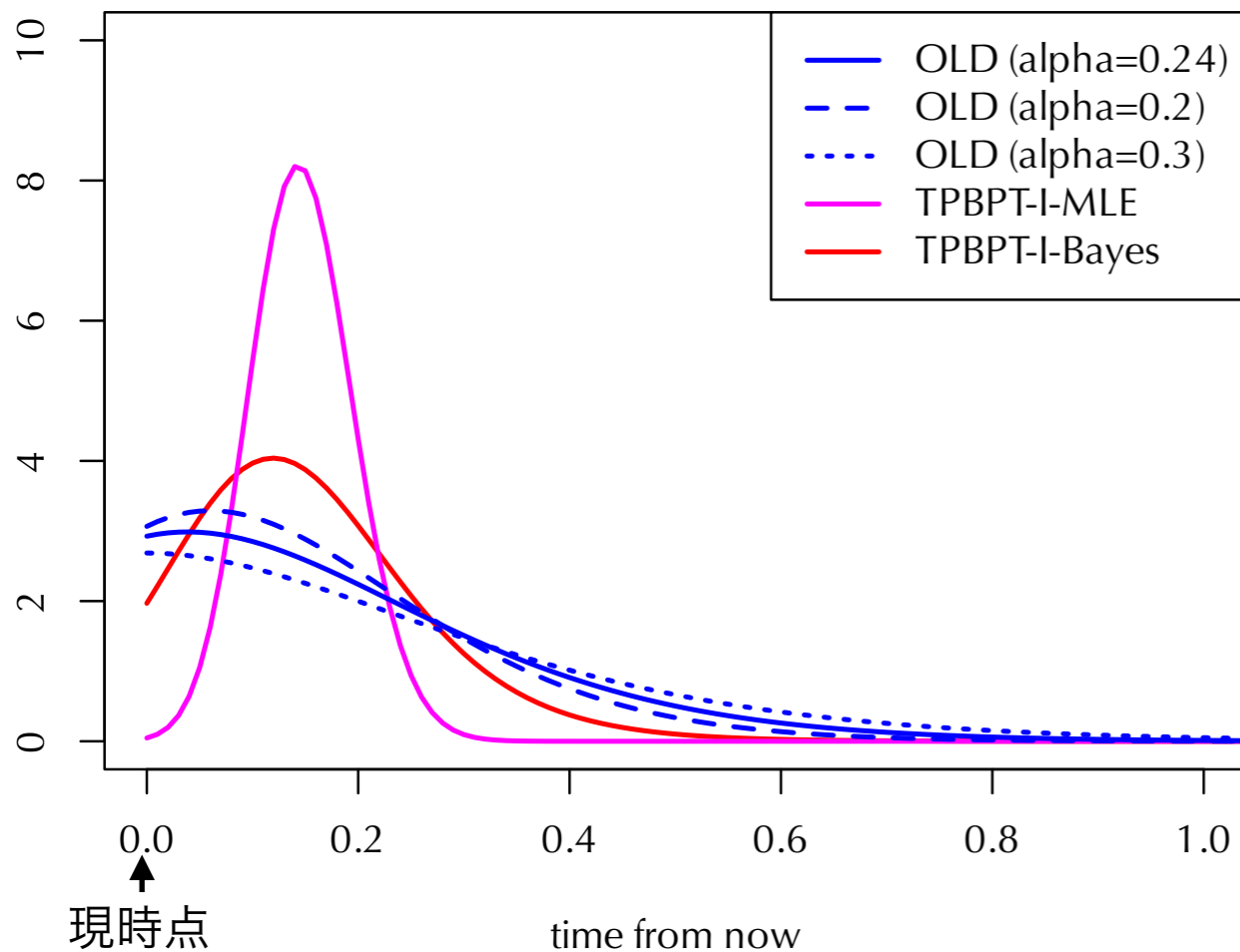
📍 Ogata (2002)と同様に、変動係数が小さく推定される。

時間予測BPTモデルと最尤推定（不確実性の考慮なし）

▶ 推定結果（1単位 = 100年 = 36500日）

📌 変動係数が小さく推定 ⇒ **平均周りに集中**

CPD



現時点 = 2024年1月1日

時間予測BPTモデルと最尤推定（不確実性の考慮あり）

▶ 隆起量の不確実性を一様分布で表現

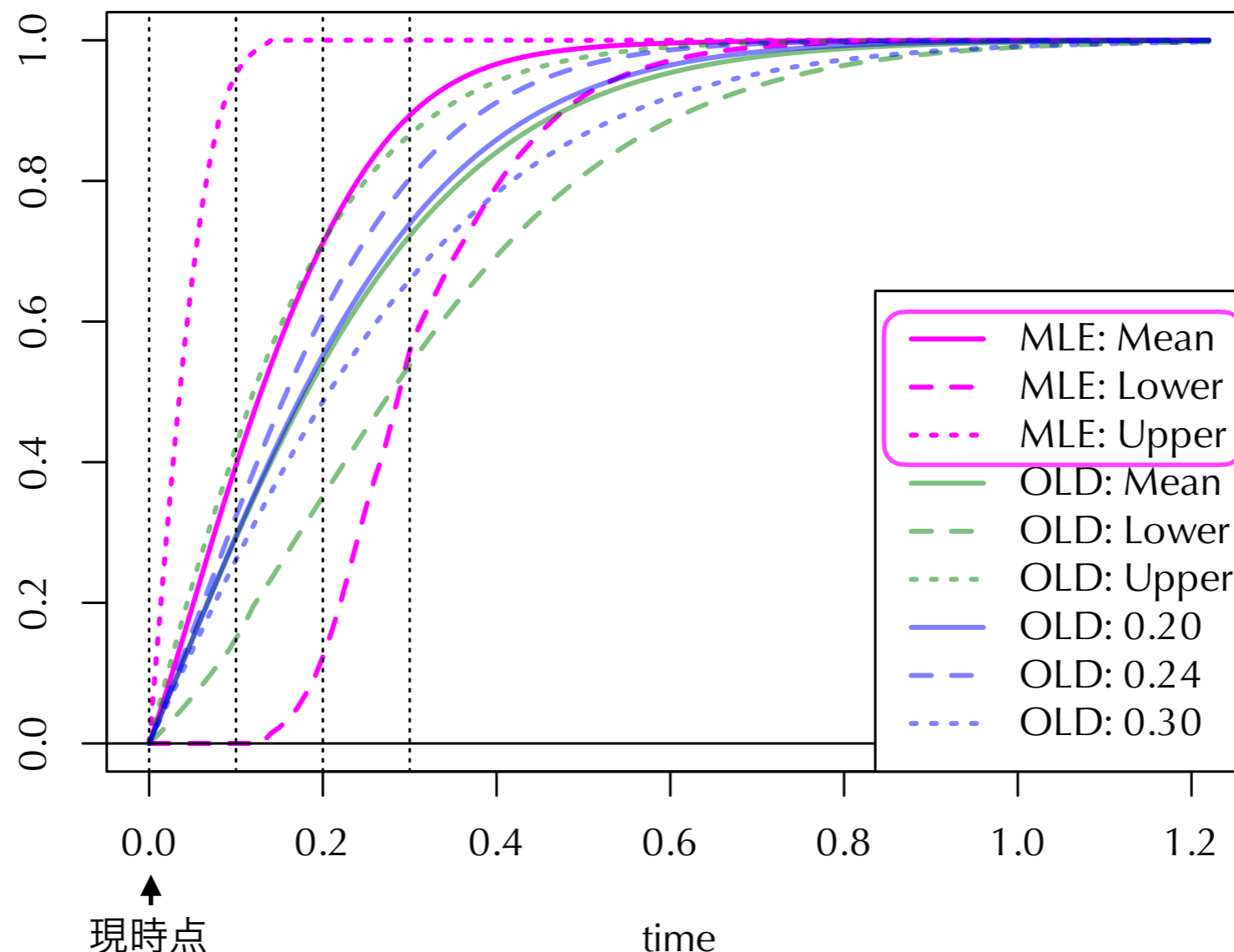
- 📌 10^4 個の乱数を $\text{Unif}([1.4, 2.4] \times [1.0, 1.4])$ から生成
- 📌 各乱数 $U_2 = (U_1, U_2)^\top$ を 宝永 と 安政 の隆起量と考え、
最尤推定を実施 $\Rightarrow 10^4$ 個のパラメータの推定値が得られる。
- 📌 それらの推定値を逆ガウス分布にプラグインすることで、
 10^4 個の条件付き予測分布が得られる。
- 📌 **それらの累積分布関数の平均値と95%最高密度区間を計算**
- 📌 これまでの評価などと重ねて可視化してみる。

時間予測BPTモデルと最尤推定（不確実性の考慮あり）

▶ 隆起量の不確実性を一様分布で表現

現時点 = 2024年1月1日

📌 条件付き予測分布のばらつきを可視化



時間予測BPT (SSD-BPT) モデル とベイズ推定

参考文献:

Ogata, Y. (2002). Slip-size-dependent renewal processes and Bayesian inferences for uncertainties, *Journal of Geophysical Research*, **107**(B11), 2268, doi:10.1029/2001JB000668.

時間予測BPTモデル

▶ 時間予測BPT (SSD-BPT) モデル

📌 逆ガウス回帰（時間予測BPT）モデルを得る.

$$T_i \sim \text{IG} \left(\beta u_i, \frac{\beta \gamma^2}{u_i} \right), \quad \gamma := a\sigma$$

▶ 現時点で、南海トラフ地震が発生していないというデータ

📌 $Y_3 = \mathbb{1}(T_3 \leq t) = 0$ というデータも用いて推定する

$$Y_3 = \mathbb{1}(T_3 \leq t) \sim \text{Ber}(q(t, \beta, u_3, \gamma)),$$

$$q(t, \beta, u_3, \gamma) := P(T_3 \leq t \mid U_3 = u_3) = F_{\text{IG}}(t \mid \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3)$$

▶ **隆起量の不確実性も合わせて、ベイズ推定を考える!**

時間予測BPTモデルのベイズ推定（不確実性考慮なし）

- ▶ パラメータ $\theta = (\beta, \gamma)^\top$ の事前分布 p_θ とする
- ▶ 不確実性を考慮しない場合のベイズ推定における観測データ
 - 📌 $T_1 = 1.4725$: 宝永から安政までの活動間隔
 - 📌 $T_2 = 0.9205$: 安政から昭和までの活動間隔
 - 📌 $Y_3 = 0$: 昭和から現在 (t) まで活動がないという情報
 - 📌 $U_1 = 1.80, U_2 = 1.20, U_3 = 1.15$: 隆起量
- ▶ **観測データ $\mathcal{D} = (T_1, T_2, U_1, U_2, U_3, Y_3)$ に対する尤度**

$$L(\beta, \gamma | \mathcal{D})$$

$$= \{1 - q(t, \beta, u_3, \gamma)\} f_{\text{IG}} \left(t_1 \mid \beta u_1, \frac{\beta \gamma^2}{u_1} \right) f_{\text{IG}} \left(t_2 \mid \beta u_2, \frac{\beta \gamma^2}{u_2} \right)$$

時間予測BPTモデルのベイズ推定（不確実性考慮なし）

- ▶ パラメータ $\theta = (\beta, \gamma)^\top$ の事前分布 p_θ とする
- ▶ 不確実性を考慮しない場合のベイズ推定における観測データ
 - 📌 $T_1 = 1.4725$: 宝永から安政までの活動間隔
 - 📌 $T_2 = 0.9205$: 安政から昭和までの活動間隔
 - 📌 $Y_3 = 0$: 昭和から現在 (t) まで活動がないという情報
 - 📌 $U_1 = 1.80, U_2 = 1.20, U_3 = 1.15$: 隆起量
- ▶ **事前分布の設計**
 - 📌 Ogata (2002) と同じく指数分布を事前分布に設定する.
$$\beta \sim \text{Exp}(\lambda_\beta), \quad \gamma \sim \text{Exp}(\lambda_\gamma), \quad (\lambda_\beta, \lambda_\gamma > 0)$$
 - 📌 Ogata (2002) では, $\nu = 1/\beta$ に指数分布なので注意

時間予測BPTモデルのベイズ推定（不確実性考慮なし）

▶ パラメータ $\theta = (\beta, \gamma)^\top$ の事前分布 p_θ とする

▶ 事前分布の設計

📌 Ogata (2002) と同じく指数分布を事前分布に設定する.

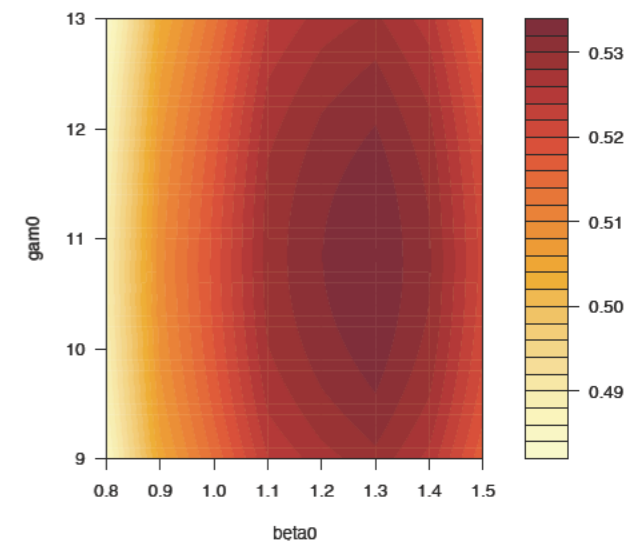
$$\beta \sim \text{Exp}(\lambda_\beta), \quad \gamma \sim \text{Exp}(\lambda_\gamma), \quad (\lambda_\beta, \lambda_\gamma > 0)$$

📌 ハイパーパラメータは, 周辺尤度最大化で決定（経験ベイズ）

$$\text{ML}(\lambda_\beta, \lambda_\gamma) = \int \int \underbrace{L(\beta, \gamma | \mathcal{D})}_{\text{likelihood}} \underbrace{p_\beta(\beta | \lambda_\beta) p_\gamma(\gamma | \lambda_\gamma)}_{\text{prior}} d\beta d\gamma$$

📌 経験ベイズによる推定結果: $(\hat{\lambda}_\beta, \hat{\lambda}_\gamma) = (1.3, 10.8)$

📌 モンテカルロ法により計算（変数変換を利用）



時間予測BPTモデルのベイズ推定（不確実性考慮なし）

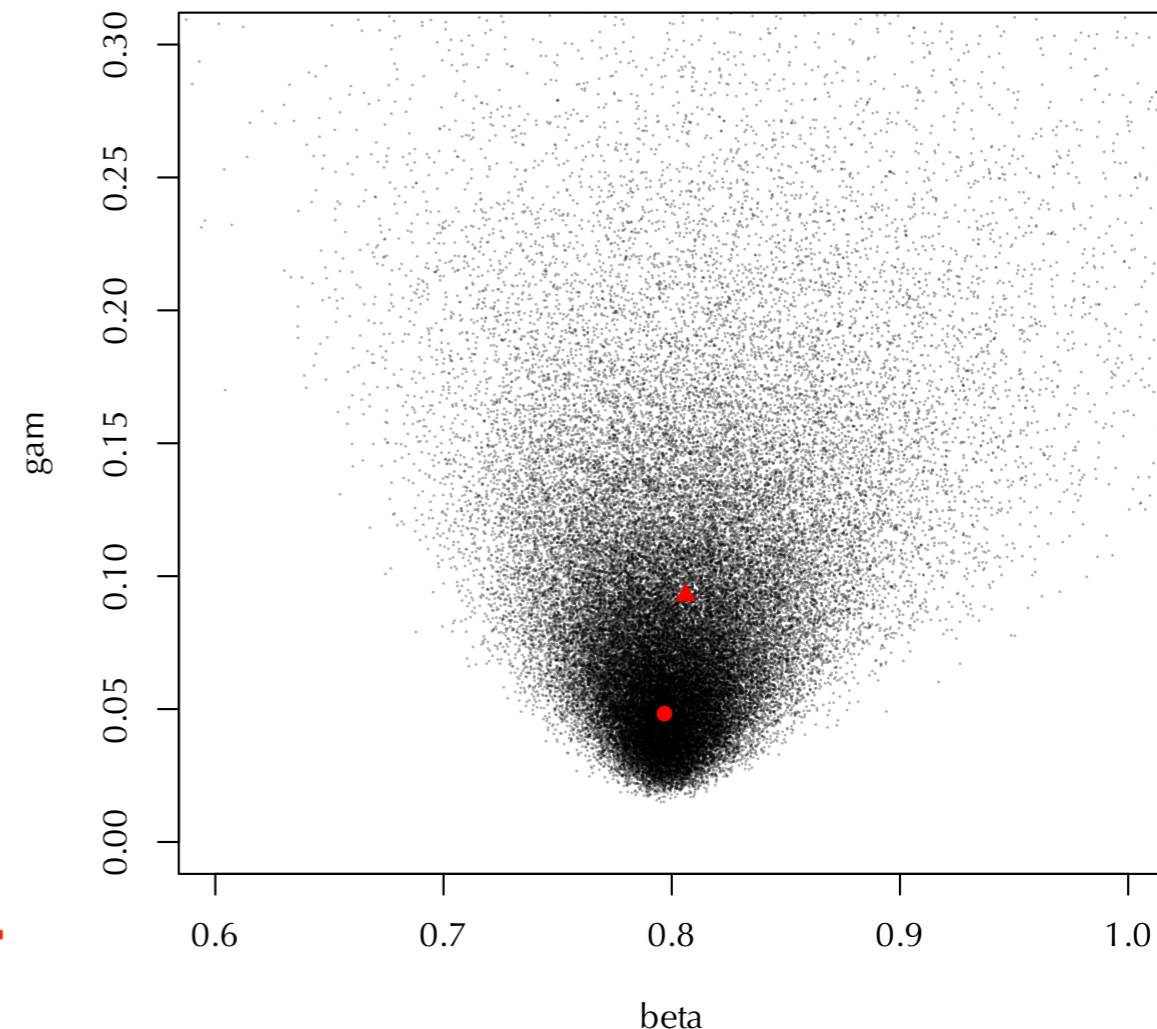
▶ ベイズ推定の結果（棄却法による事後分布からのサンプリング）

📌 MAP推定量： $(\hat{\beta}_{\text{MAP}}, \hat{\gamma}_{\text{MAP}}) = (0.7968, 0.0483)$

📌 事後平均： $(\hat{\beta}_{\text{B}}, \hat{\gamma}_{\text{B}}) = (0.8061, 0.0928)$

📌 Ogata (2002) の結果と概ね一致
(Table 6 を参照)

Real Timescale			
MAP1	MAP2	BE 1	BE 2
9.77×10^{-3}	—	8.57×10^{-3}	—
4.37	0.0322	4.37	0.0577
36.0	80.2	22.2	81.2
0.0126	0.0433	0.0124	0.0936
0.79365		0.80645	



時間予測BPTモデルのベイズ推定（不確実性考慮なし）

▶ ベイズ推定の結果（棄却法による事後分布からのサンプリング）

📍 MAP推定量： $(\hat{\beta}_{\text{MAP}}, \hat{\gamma}_{\text{MAP}}) = (0.7968, 0.0483)$

📍 事後平均： $(\hat{\beta}_{\text{B}}, \hat{\gamma}_{\text{B}}) = (0.8061, 0.0928)$

📍 **事後分布**に関して、**統計（予測）モデル**を平均化することで、
 T_3 の事後予測分布を考えることができる。

$$p_{\text{pp}}^{(\text{IG})}(t_3 \mid T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, \mathbf{U}_3 = \mathbf{u}_3)$$

$$= \int \int \underbrace{f_{\text{IG}}(t_3 \mid \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3)}_{\substack{\uparrow \text{予測モデル}}} \underbrace{p(\beta, \gamma \mid T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, \mathbf{U}_3 = \mathbf{u}_3)}_{\substack{\downarrow \text{事後分布}}} d\beta d\gamma$$

📍 この場合、現在以前の発生確率も正となることに注意

時間予測BPTモデルのベイズ推定（不確実性考慮なし）

▶ 切断逆ガウス分布を用いた予測

📍 **事後分布**に関して、**統計（予測）モデル**を平均化することで、 T_3 の事後予測分布を考えることができる。

📍 統計（予測）モデルに切断逆ガウス分布を仮定することで、

$$f_{\text{TIG}}(t_3 | t, \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3) = \frac{f_{\text{IG}}(t_3 | \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3)}{1 - F_{\text{IG}}(t | \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3)}$$

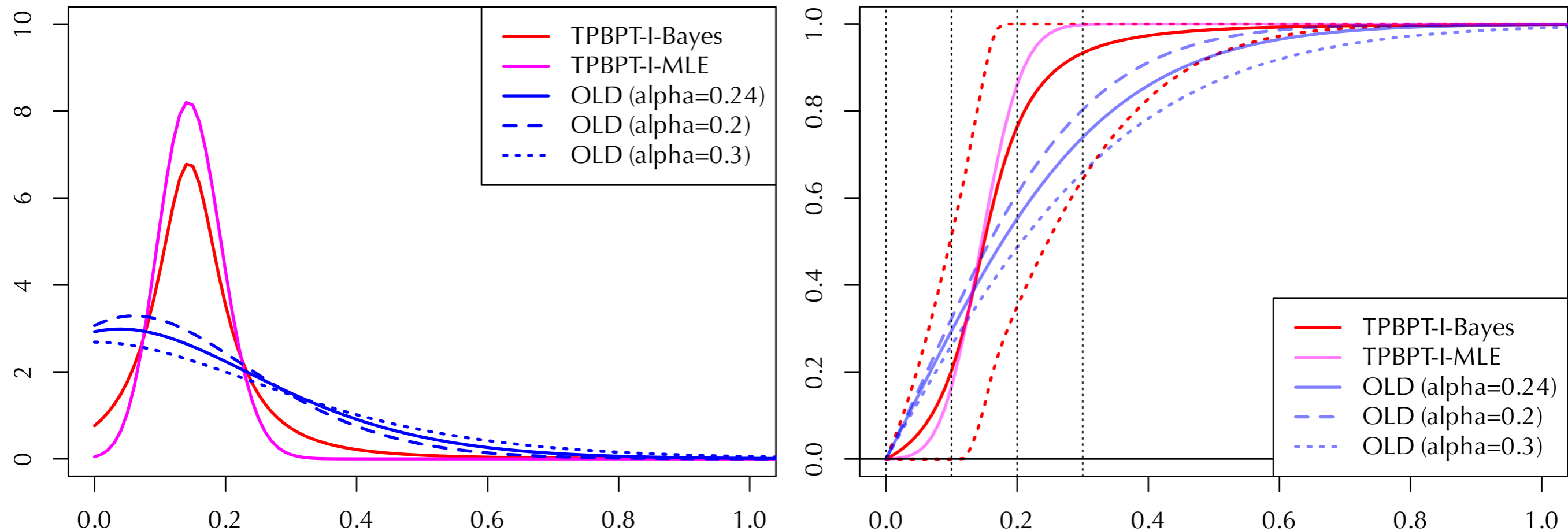
現在以前の発生確率が0となるような事後予測分布を考える。

$$\begin{aligned} p_{\text{pp}}^{(\text{TIG})}(t_3 | T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, \mathbf{U}_3 = \mathbf{u}_3) & \quad \downarrow \text{事後分布} \\ = \int \int \underbrace{f_{\text{TIG}}(t_3 | t, \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3)}_{\uparrow \text{切断逆ガウス分布}} \underbrace{p(\beta, \gamma | T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, \mathbf{U}_3 = \mathbf{u}_3)}_{\text{事後分布}} d\beta d\gamma \end{aligned}$$

時間予測BPTモデルのベイズ推定（不確実性考慮なし）

▶ 切断逆ガウス分布を用いた予測

- 📌 事後分布に関して、統計（予測）モデルを平均化することで、 T_3 の事後予測分布を考えることができる。



時間予測BPTモデルのベイズ推定 (不確実性を考慮)

▶ 隆起量の不確実性を確率分布で表現する!

📍 隆起量を局外母数と考え, 事前分布を考える.

📍 宝永地震と安政地震の隆起量の不確実性を表す分布

$$U_1 \sim p_{U_1}, \quad U_2 \sim p_{U_2}, \quad U_2 = (U_1, U_2)^\top$$

▶ パラメータ $\theta = (\beta, \gamma)^\top$ の事前分布 p_θ とする

▶ 不確実性を考慮したベイズ推定における観測データ

📍 $T_1 = 1.4725$: 宝永から安政までの活動間隔

📍 $T_2 = 0.9205$: 安政から昭和までの活動間隔

📍 $Y_3 = 0$: 昭和から現在まで活動がないという情報

📍 $U_3 = 1.15$: 昭和地震の隆起量 (一旦, 不確実性を考えない)

時間予測BPTモデルのベイズ推定 (不確実性を考慮)

- ▶ パラメータ $\theta = (\beta, \gamma)^\top$ と隆起量 $U_2 = (U_1, U_2)^\top$ の事後分布

$$p(\theta, \mathbf{u}_2 \mid T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, U_3 = u_3)$$

$$\propto \{1 - q(t, \beta, u_3, \gamma)\} f_{\text{IG}}(t_1 \mid \beta u_1, \beta \gamma^2 / u_1) f_{\text{IG}}(t_2 \mid \beta u_2, \beta \gamma^2 / u_2)$$

$$\times \underbrace{p_\theta(\theta) p_{U_1}(u_1) p_{U_2}(u_2)}_{\text{prior}}$$

↑ 尤度

ここで, $\mathbf{T}_2 := (T_1, T_2)^\top$, $\mathbf{t}_2 = (1.4725, 0.9205)^\top$, $u_3 = 1.15$ である.

- ▶ 事後分布に関して, 統計モデル (BPT分布) を平均化することで, T_3 の事後予測分布を考えることができる.

$$p_{\text{pp}}^{(\text{IG})}(t_3 \mid T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, U_3 = u_3)$$

↓ 事後分布

$$= \int \int f_{\text{IG}}(t_3 \mid \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3) p(\theta, \mathbf{u}_2 \mid T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, U_3 = u_3) d\theta d\mathbf{u}_2$$

時間予測BPTモデルのベイズ推定 (不確実性を考慮)

- ▶ 予測に逆ガウス分布を使った場合,
現時点以前も予測分布において正の確率をもつ.
- ▶ **切断逆ガウス分布**を用いた予測分布を考える.

$$f_{\text{TIG}}(t_3 | t, \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3) = \frac{f_{\text{IG}}(t_3 | \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3)}{1 - F_{\text{IG}}(t | \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3)}$$



$$\begin{aligned} p_{\text{pp}}^{(\text{TIG})}(t_3 | T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, U_3 = u_3) \\ = \int \int f_{\text{TIG}}(t_3 | t, \beta u_3, \beta \gamma^2 / u_3) p(\theta, \mathbf{u}_2 | T_3 > t, \mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2, U_3 = u_3) d\theta d\mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

時間予測BPTモデルのベイズ推定 (不確実性を考慮)

▶ 事後予測分布による評価の例

- 📍 隆起量の不確実性に一様分布を仮定:

$$U_1 \sim \text{Unif}(1.4, 2.4), U_2 \sim \text{Unif}(1.0, 1.4)$$

- 📍 回帰パラメータの不確実性に正規分布 & 一様分布を仮定

$$\beta \sim N(0.8, 0.05^2), \gamma \sim \text{Unif}(0.08, 0.3)$$

▶ 注意点

- 📍 上述の事前分布はあくまでも例として設定
- 📍 事前分布の設定により, 信用区間の幅は異なる
- 📍 事前分布の設定が異なるため, 前述の指数分布を用いた結果と単純に比較はできない.

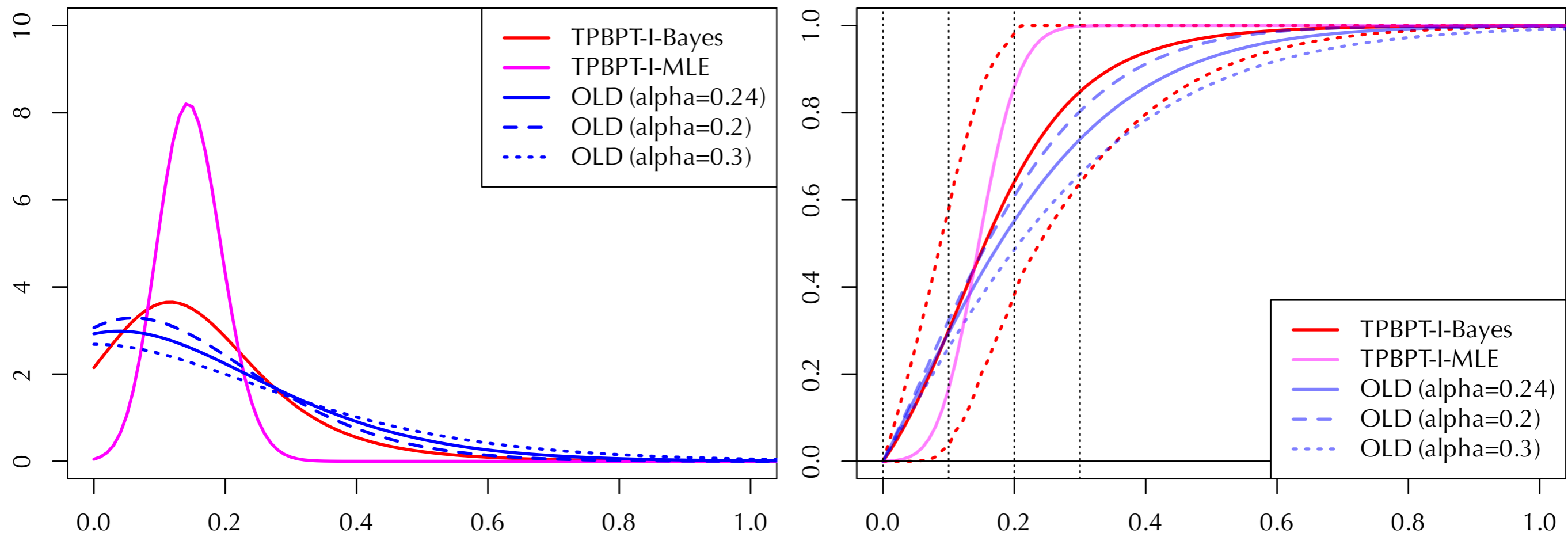
時間予測BPTモデルのベイズ推定 (不確実性を考慮)

▶ 事後予測分布による評価の例

- 📌 隆起量の不確実性に一様分布を仮定:

$$U_1 \sim \text{Unif}(1.4, 2.4), U_2 \sim \text{Unif}(1.0, 1.4)$$

- 📌 回帰パラメータの不確実性に正規分布 & 一様分布を仮定



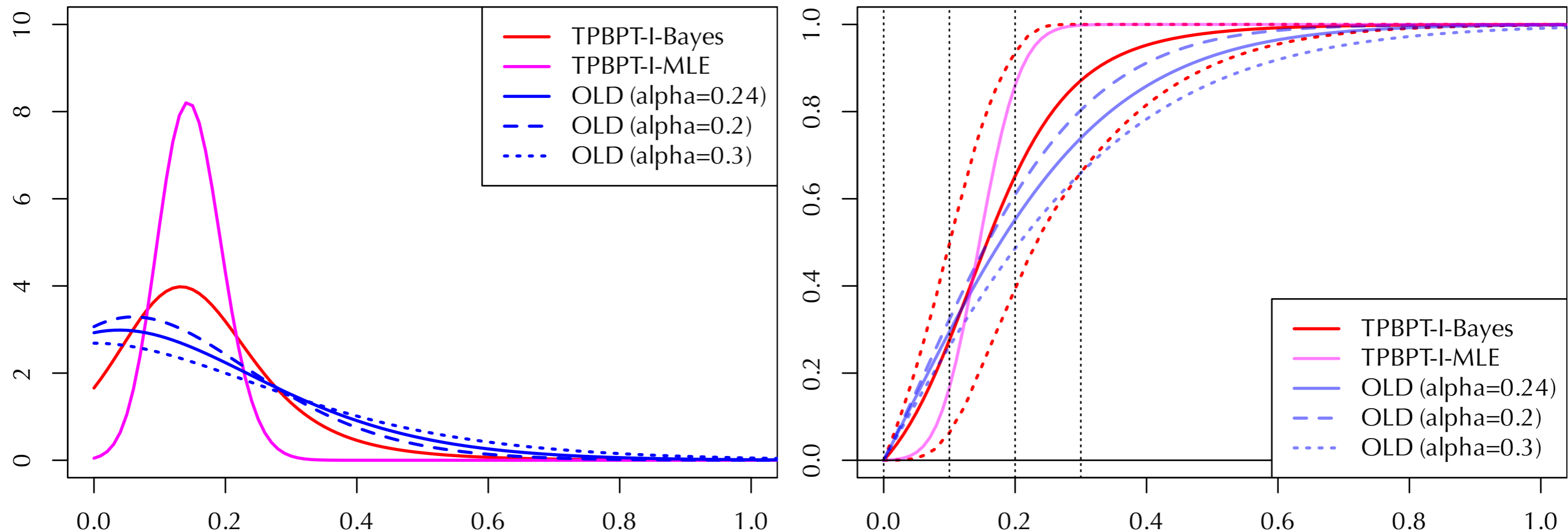
時間予測BPTモデルのベイズ推定

▶ 事後予測分布による評価の例 (不確実性考慮なし)

- 📌 回帰パラメータの不確実性に正規分布 & 一様分布を仮定

$$\beta \sim N(0.8, 0.05^2), \gamma \sim \text{Unif}(0.08, 0.3)$$

- 📌 事前分布は同じ \Rightarrow 不確実性がない分, 確度が高くなる.



時間予測BPTモデルのベイズ推定の問題点

- ▶ 不確実性を考えない場合は, 安定的なベイズ推定が行えていた.
- ▶ 不確実性を考慮すると, ベイズ推定が不安定になる
 - 📌 最尤推定できないモデル ⇒ 尤度が発散
 - 📌 下手な事前分布を選ぶと推定が不安定
⇒ 事後分布が病的になる (尤度の発散が原因)
 - 📌 γ に対する事前分布の設計が大切 ⇒ 小さい γ は不安定
 - 📌 不安定性から周辺尤度は使えないので注意が必要
- ▶ 以上を踏まえて, 以下を詳細に議論する必要がある.
 - 📌 γ の事前分布をどのように設計すべきか?
 - 📌 不確実性を取り入れたベイズ推定を使うべきか?