

活動間隔のばらつき α のベイズ推定 —中央構造線断層帯の例—

統計数理研究所

野村 俊一

2018年10月30日 地震調査研究推進本部 長期評価部会

目的: MTLセグメント共通のばらつき α の推定

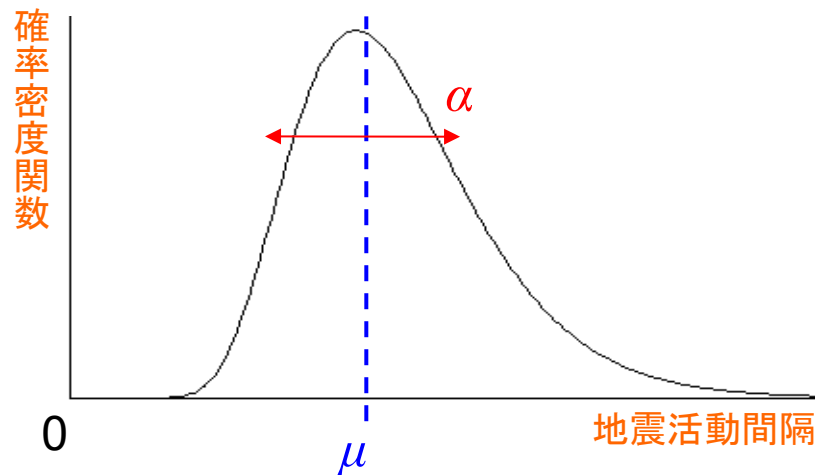
各地震活動間隔が以下のBPT (Brownian Passage Time) 分布に従うと仮定し、MTLの活動時期から、セグメント共通の活動間隔のばらつき α を推定する

$$\underbrace{f(x|\mu, \alpha)}_{\text{確率密度関数}} = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi\alpha^2 x^3}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\mu\alpha^2 x}\right\}$$

$$\underbrace{F(x|\mu, \alpha)}_{\text{累積分布関数}} = \int_0^x f(x'|\mu, \alpha) dx' = \underbrace{\Phi\left\{\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{x}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{x}}\right)\right\}}_{\text{標準正規分布の累積分布関数}} + e^{\frac{\alpha^2}{2}} \underbrace{\Phi\left\{\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{x}{\mu}} + \sqrt{\frac{\mu}{x}}\right)\right\}}_{\text{標準正規分布の累積分布関数}}$$

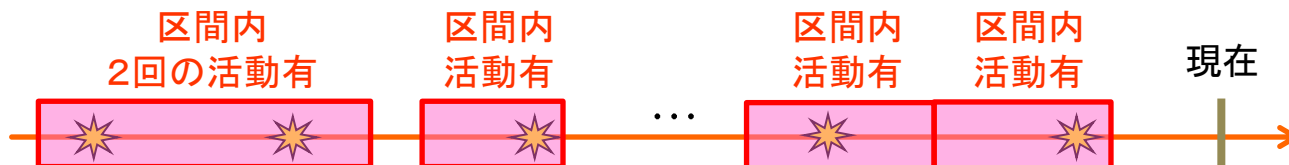
μ : 平均活動間隔

α : 活動間隔のばらつき(変動係数) = $\frac{\text{活動間隔の標準偏差}}{\text{平均活動間隔}}$



α の推定における課題と解決策

- 活動時期が特定された過去の活動は、殆どの活断層で3つ以下しかなく、単独の活断層の活動履歴から活動間隔のばらつき α を推定するのは困難
 - ⇒ 地震本部(2002)は、比較的多数の活動時期が特定された4活断層から、全国共通で適用する α の最尤推定値 $\alpha = 0.24$ を算出した
 - ⇒ しかし、BPT分布の α の最尤推定値は、平均的に過小評価される傾向にあり、ベイズ事後分布に基づいて α を評価すべき(Nomura et al., 2011)
- また、特定された活動時期は、1点に定まらず、区間で与えられることが多い
 - ⇒ 地震本部(2002)は α の推定に際し、活動時期を区間の midpoint で近似した
 - ⇒ 活動時期の乱数に基づく尤度(モンテカルロ近似)で評価すべき



ばらつき α の評価方法の流れ

1. セグメント毎の尤度の評価

- 不確かな活動時期に対する尤度関数
- 尤度関数のモンテカルロ近似
- MTLセグメント毎の尤度関数と最尤推定値

2. α のベイズ事後分布の評価

- ベイズ事前分布の設定
- ベイズ事後分布の評価
- MTLセグメントのベイズ事後分布
- ベイズ事後分布の離散近似

3. 地震本部の内陸主要活断層に対する α のベイズ事後分布

不確かな活動時期に対する尤度関数

- 過去の活動時期が不確かである場合は、各活動時期の確率分布に関して積分することで尤度関数を評価する (Ogata, 1999)

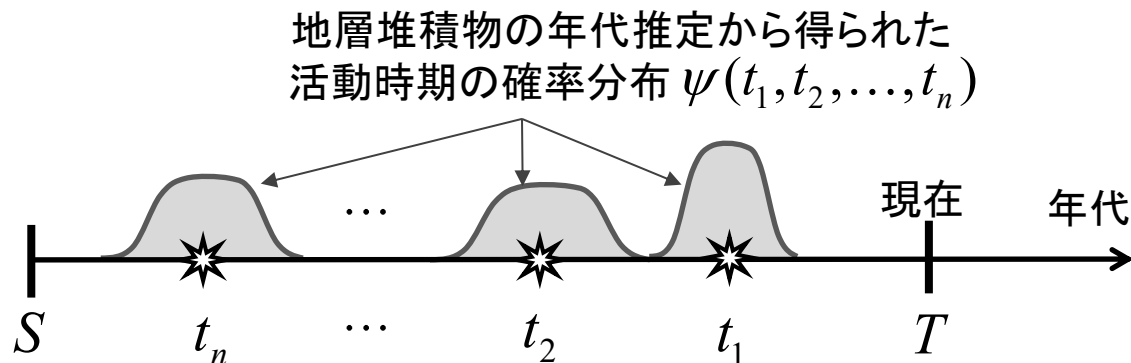
- ・ 過去の活動時期が正確に判明している場合の尤度関数

$$L(\mu, \alpha; t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{\mu} \{1 - F(T - t_1 | \mu, \alpha)\} \left\{ \prod_{i=2}^n f(t_i - t_{i-1} | \mu, \alpha) \right\} \{1 - F(t_n - S | \mu, \alpha)\}$$

- ・ 過去の活動時期が不確かで確率分布 $\psi(t_1, \dots, t_n)$ に従う場合の尤度関数

$$L(\mu, \alpha) = \int \cdots \int L(\mu, \alpha; t_1, \dots, t_n) \psi(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n$$

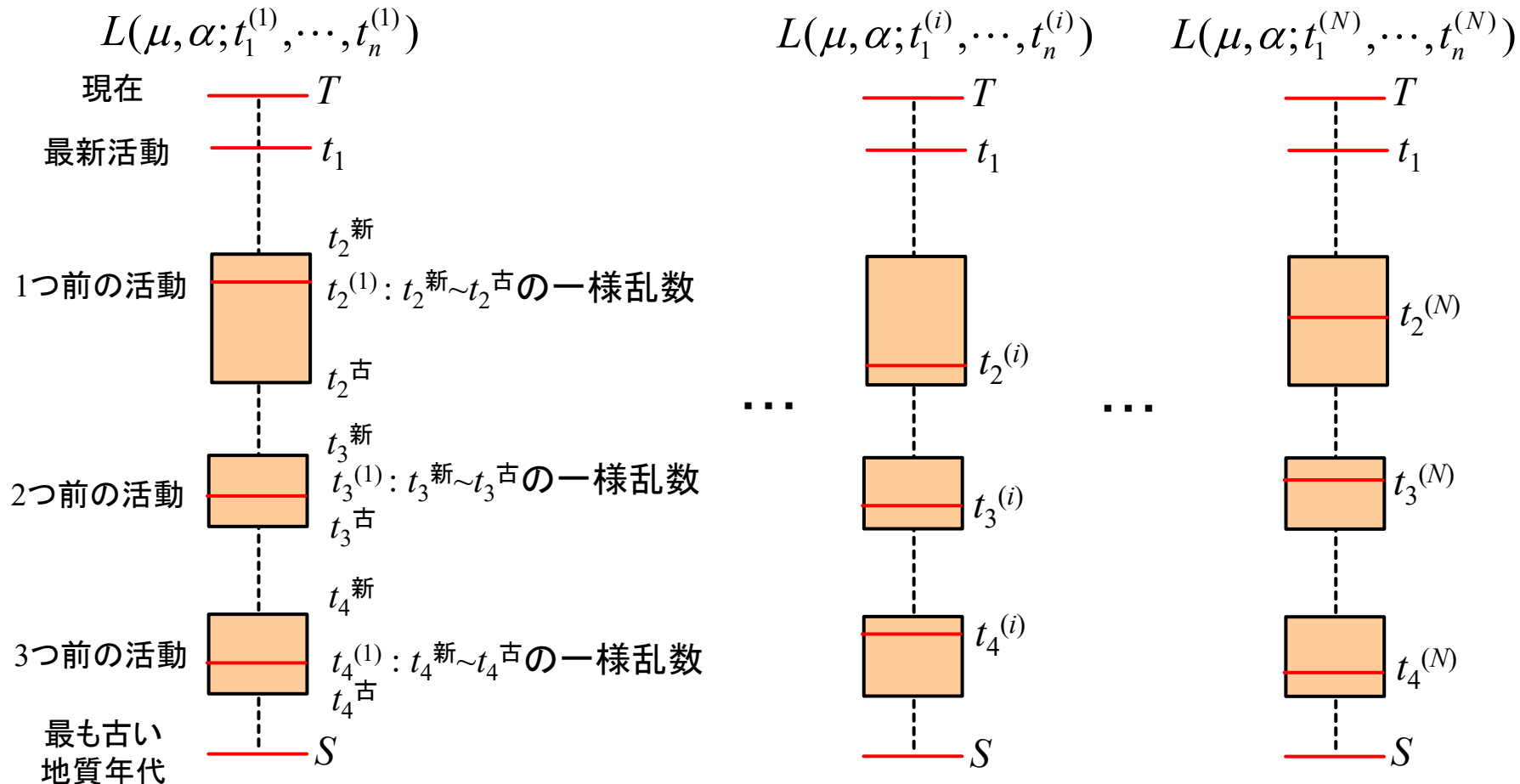
※ ここでは、不確かな活動時期は推定区間内の一様分布に従うものとして扱う



尤度関数のモンテカルロ近似

幅のある活動年代について、 $N=100,000$ 組の一樣乱数を生成し、各乱数の組に対する尤度の平均をとることで、本来の積分を含む尤度関数を近似評価する

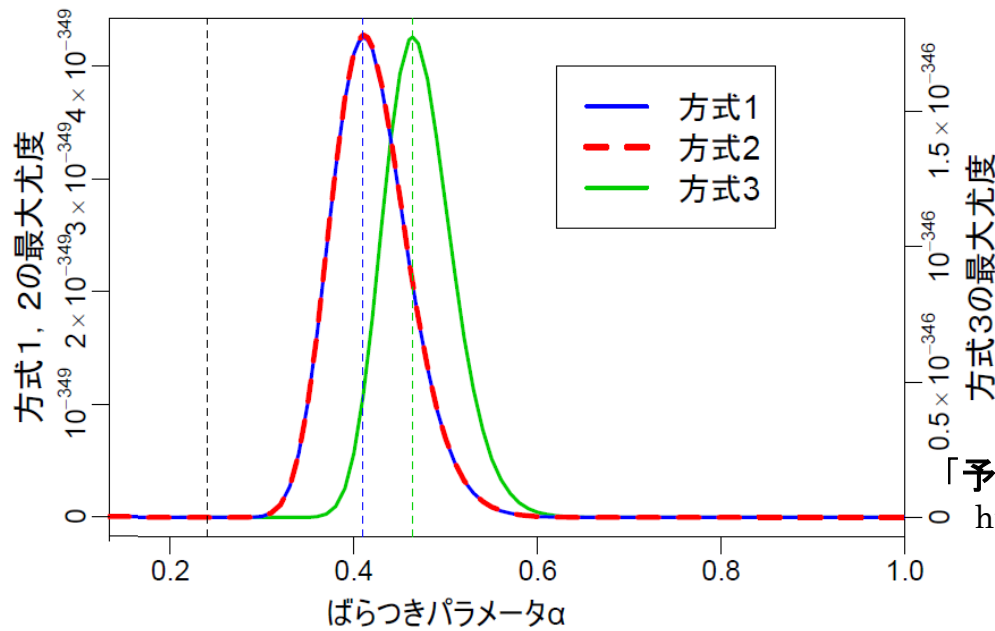
$$L(\mu, \alpha) = \int \cdots \int L(\mu, \alpha; t_1, \cdots, t_n) \psi(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n \doteq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L(\mu, \alpha; t_1^{(i)}, \cdots, t_n^{(i)})$$



モンテカルロ近似の精度

直近3回以上の活動時期が判明している33セグメントに対し、セグメント個別の平均活動間隔 μ と、全セグメント共通のばらつき α を最尤法により推定した。幅のある活動時期に対し、モンテカルロ近似は数値積分とほぼ同等となるが、幅の中心で活動時期を近似してしまうと異なる結果が得られる。

	方式1 (数値積分)	方式2 (モンテカルロ近似)	方式3 (中点近似)
ばらつき α の最尤推定値 (標準誤差)	0.41 (0.04)	0.41 (0.04)	0.46 (0.03)
最大尤度 (最大対数尤度)	4.26×10^{-349} (-802.153)	4.28×10^{-349} (-802.149)	1.76×10^{-346} (-796.127)

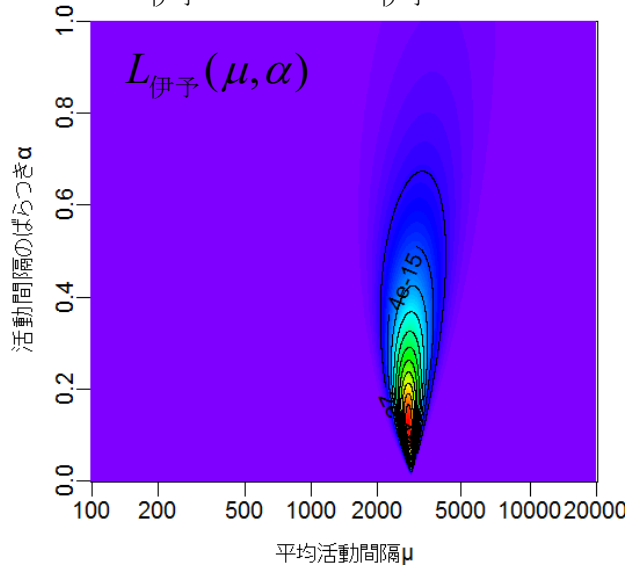


「予知連会報」2017年9月, 第98巻 (11-5), pp. 443-448.
http://cais.gsi.go.jp/YOCHIREN/report/kaihou98/11_05.pdf

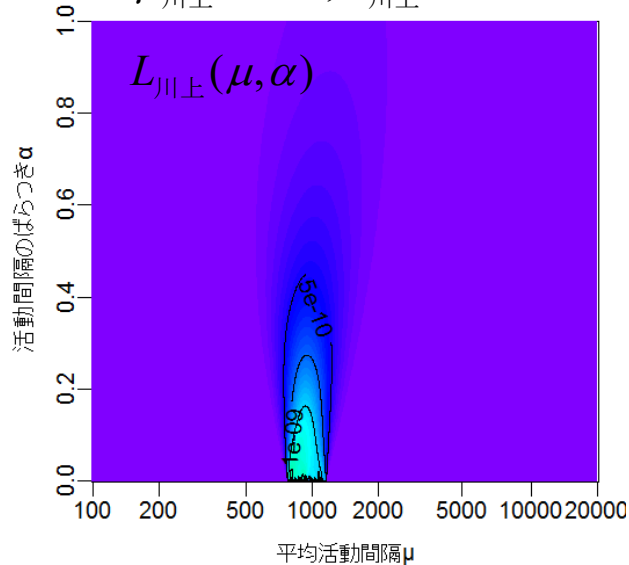
セグメントごとの尤度関数と最尤推定値

活動間隔のばらつき α の最尤推定値は軒並み低い(0.001~0.153)

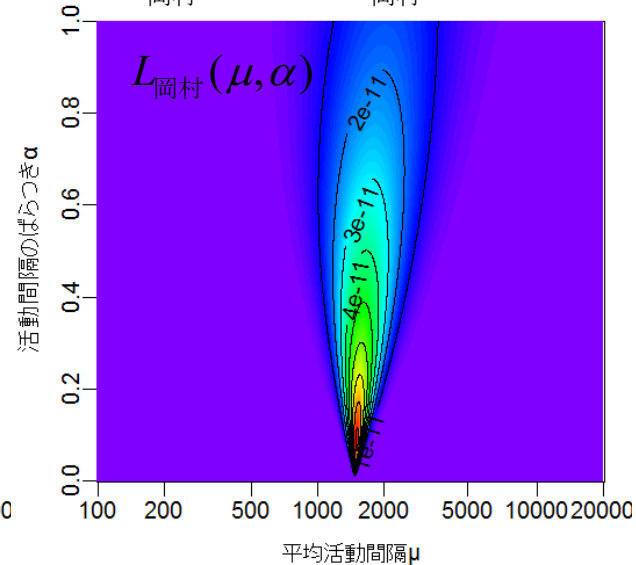
$$\hat{\mu}_{\text{伊予}} = 2780, \hat{\alpha}_{\text{伊予}} = 0.121$$



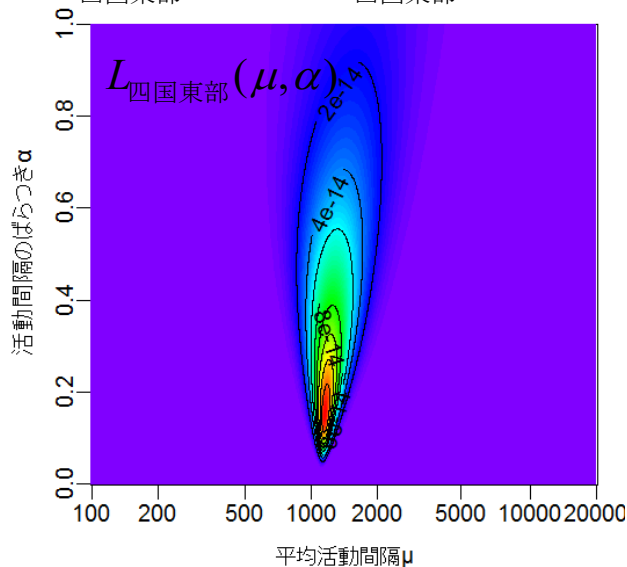
$$\hat{\mu}_{\text{川上}} = 925, \hat{\alpha}_{\text{川上}} = 0.001$$



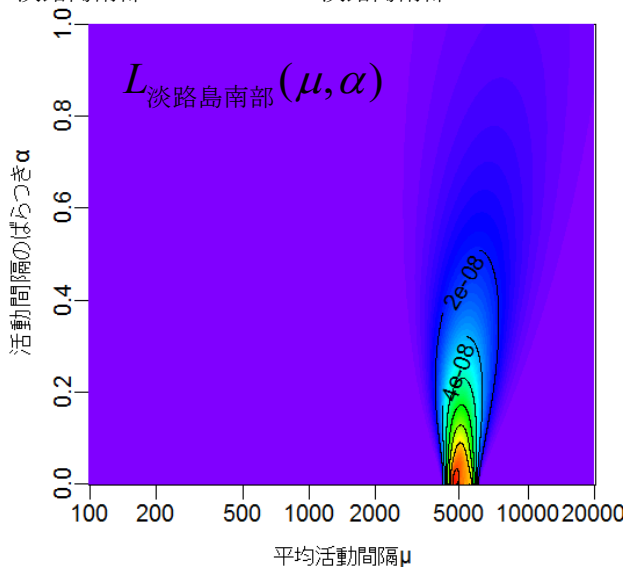
$$\hat{\mu}_{\text{岡村}} = 1507, \hat{\alpha}_{\text{岡村}} = 0.088$$



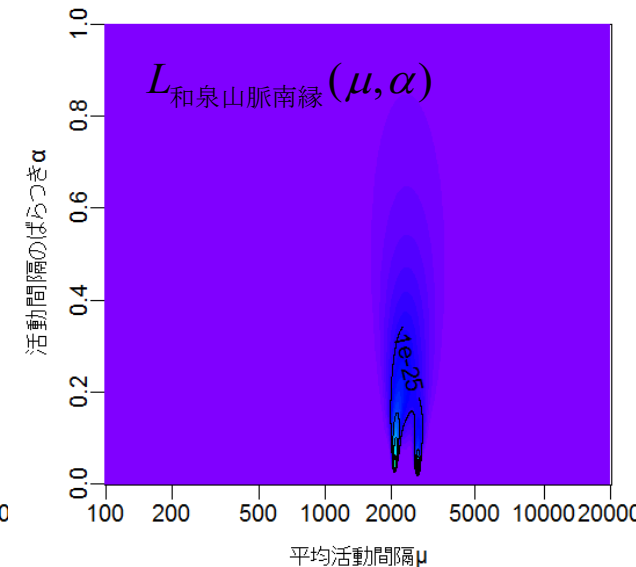
$$\hat{\mu}_{\text{四国東部}} = 1159, \hat{\alpha}_{\text{四国東部}} = 0.153$$



$$\hat{\mu}_{\text{淡路島南部}} = 4571, \hat{\alpha}_{\text{淡路島南部}} = 0.002$$



$$\hat{\mu}_{\text{和泉山脈南縁}} = 2630, \hat{\alpha}_{\text{和泉山脈南縁}} = 0.033$$



ばらつき α の評価方法の流れ

1. セグメント毎の尤度の評価
 - 不確かな活動時期に対する尤度関数
 - 尤度関数のモンテカルロ近似
 - MTLセグメント毎の尤度関数と最尤推定値
2. α のベイズ事後分布の評価
 - ベイズ事前分布の設定
 - ベイズ事後分布の評価
 - MTLセグメントのベイズ事後分布
 - ベイズ事後分布の離散近似
3. 地震本部の内陸主要活断層に対する α のベイズ事後分布

パラメータ μ, α のベイズ事前分布の導入

ばらつき α の最尤推定値は過小評価される (Nomura et al., 2011)
ため、パラメータ μ, α にベイズ事前分布を導入した上で事後分布を
評価することとする

- 平均活動間隔 : $\log \mu$ に $\log 100 \sim \log 20000$ の一様分布を仮定
(スケール(対数)に応じた確率重みを与える)
- 活動間隔のばらつき : α には $0 \sim 1$ の一様分布を仮定
(ポアソン過程の変動係数1は超えないと考える)

上の事前分布に関する数値積分をするために次のように離散化する

$$\log_{10} 100 < \log_{10} \mu < \log_{10} 20000 \Rightarrow \mu_j = 10^{2+0.002j} \quad (j = 1, \dots, 1150)$$

$$0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha_k = 0.001k \quad (k = 1, \dots, 1000)$$

ばらつき α のベイズ事後分布の評価

まずセグメントごとに α のベイズ事後分布を次式により評価する

$$posterior_{\text{第}m\text{セグメント}}(\alpha_k) = \frac{\int_{\log 100}^{\log 20000} L_{\text{第}m\text{セグメント}}(\mu, \alpha_k) d \log \mu}{\int_0^1 \int_{\log 100}^{\log 20000} L_{\text{第}m\text{セグメント}}(\mu, \alpha) d \log \mu d \alpha} \doteq \frac{\sum_{j=1}^J L_{\text{第}m\text{セグメント}}(\mu_j, \alpha_k)}{\sum_{k'=1}^K \sum_{j=1}^J L_{\text{第}m\text{セグメント}}(\mu_j, \alpha_{k'})}$$

$(\alpha_k = 0.001k, k = 1, \dots, 1000)$

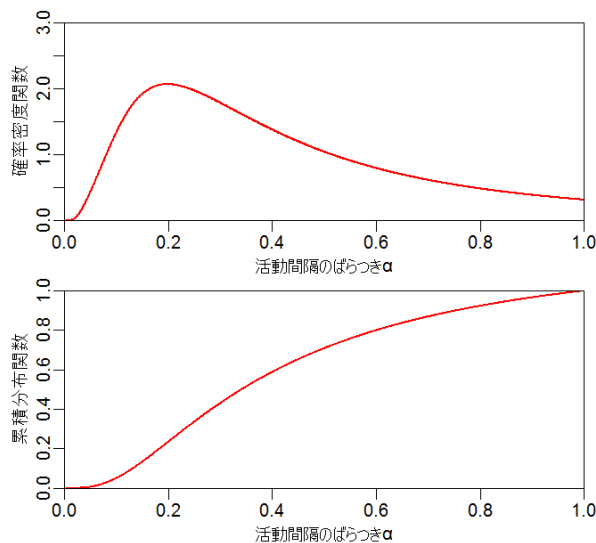
次式のようにベイズ事後分布を統合することにより、ばらつき α が全セグメントで共通と仮定した場合のベイズ事後分布を評価する

$$posterior(\alpha_k) = \frac{\prod_{m=1}^M posterior_{\text{第}m\text{セグメント}}(\alpha_k)}{\int_0^1 \prod_{m=1}^M posterior_{\text{第}m\text{セグメント}}(\alpha) d \alpha} \doteq \frac{\prod_{m=1}^M posterior_{\text{第}m\text{セグメント}}(\alpha_k)}{\sum_{k'=1}^K \prod_{m=1}^M posterior_{\text{第}m\text{セグメント}}(\alpha_{k'})}$$

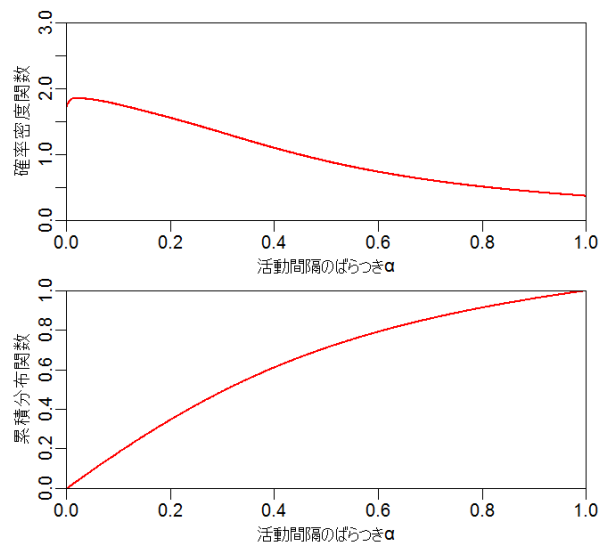
$(\alpha_k = 0.001k, k = 1, \dots, 1000)$

MTLセグメントごとの α のベイズ事後分布

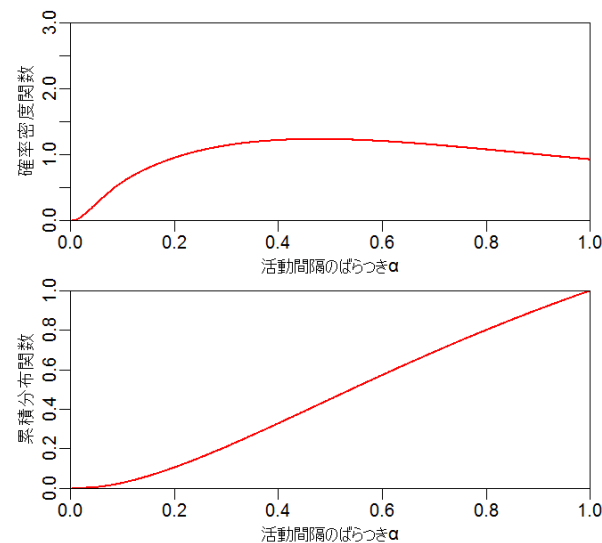
伊予セグメント



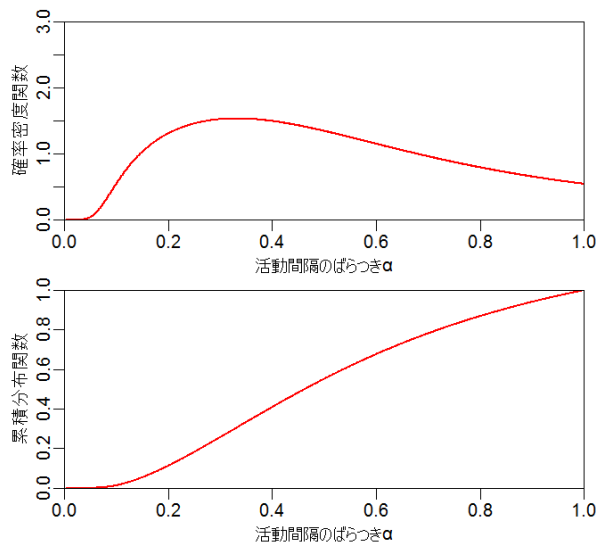
川上セグメント



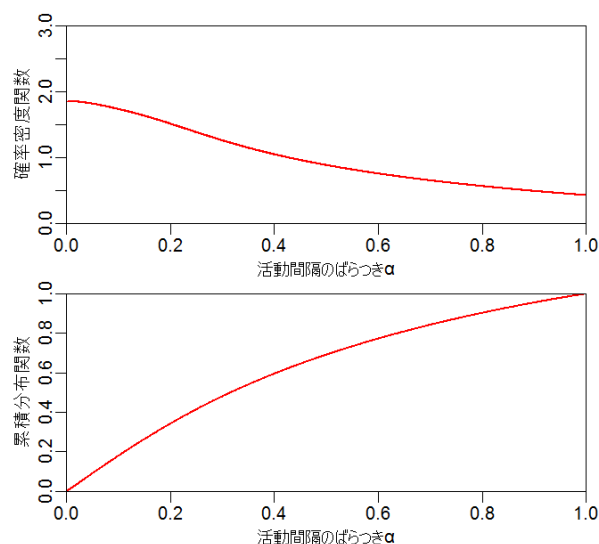
岡村セグメント



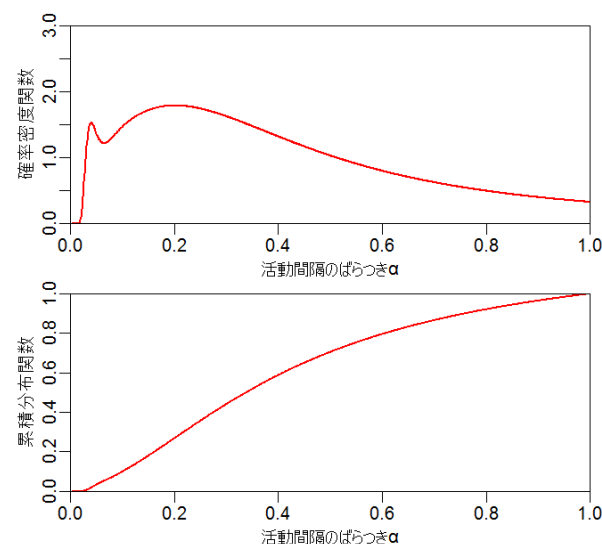
四国東部セグメント



淡路島南部セグメント

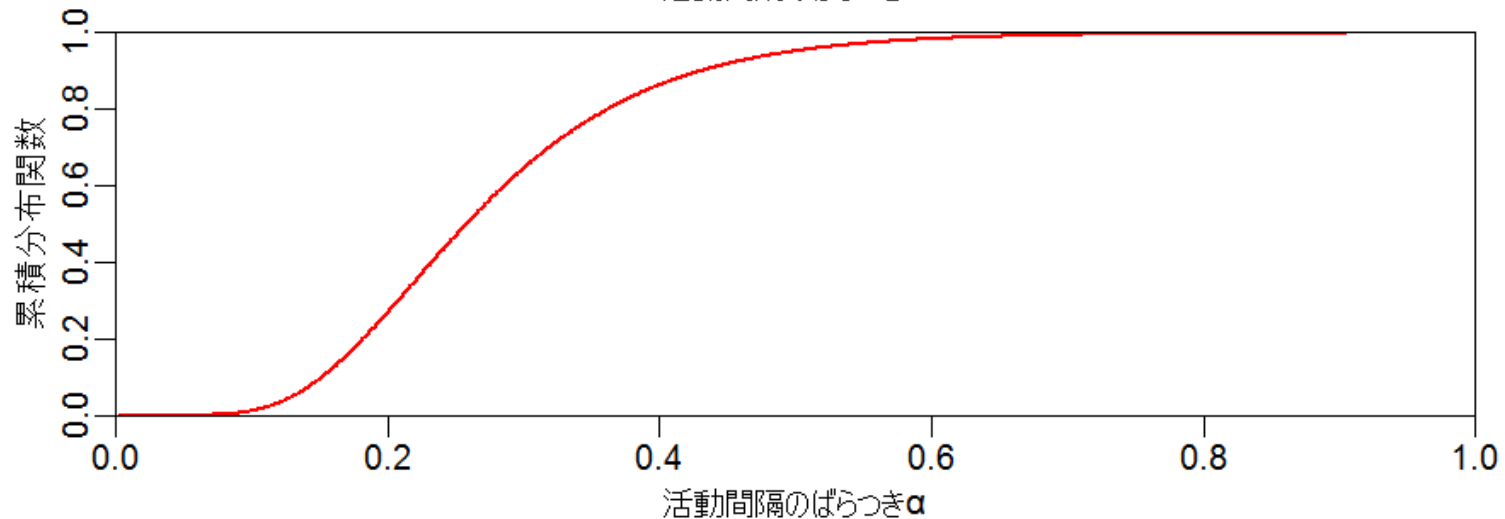
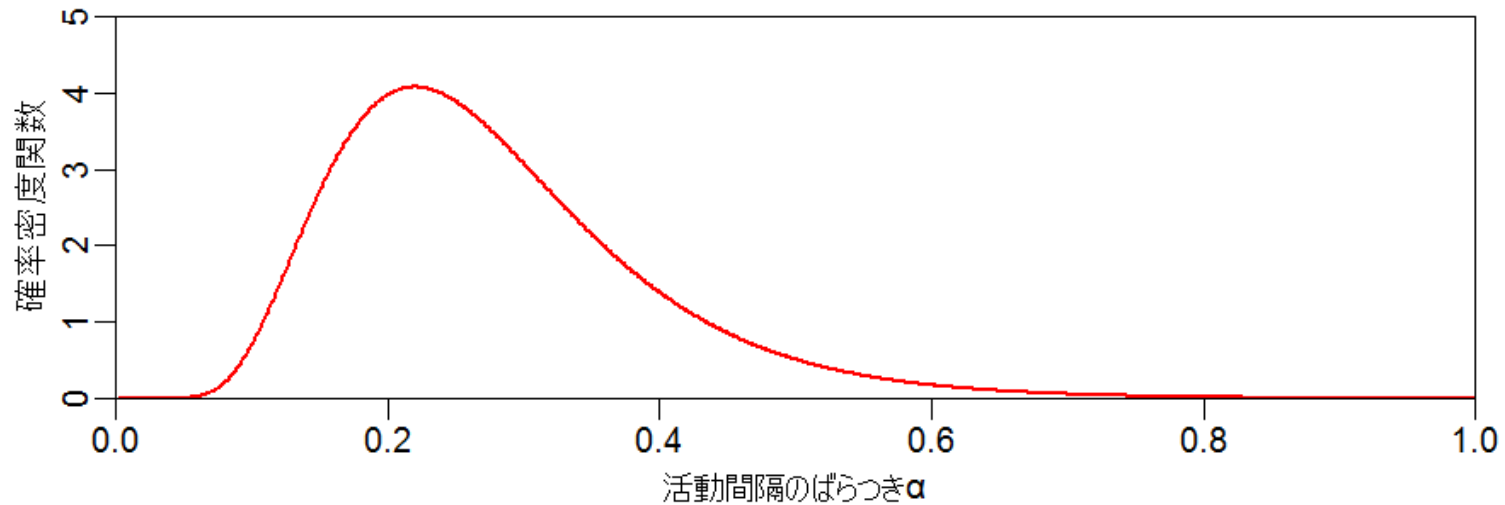


和泉山脈南縁セグメント



MTLセグメント共通の α のベイズ事後分布

ベイズ事後分布は $\alpha = 0.220$ で最大値をとっており、セグメント毎の α の最尤推定値 (0.001~0.153) に比べて大きい



ベイズ事後分布の離散近似

ロジックツリーによるハザード評価を行うために、前頁の α のベイズ事後分布を少数のパーセンタイルと確率重みにより離散近似する

離散近似には次表のGaussian quadrature (Miller and Rice, 1983) を利用し、 α を3つ、4つ、5つの離散値で近似した場合をそれぞれ示す

3つの値による離散近似		4つの値による離散近似		5つの値による離散近似	
累積確率	確率重み	累積確率	確率重み	累積確率	確率重み
0.084669	0.247614	0.051621	0.150361	0.034893	0.101080
0.500000	0.504771	0.312208	0.349639	0.211702	0.244290
0.915331	0.247614	0.687792	0.349639	0.500000	0.309260
		0.948379	0.150361	0.788298	0.244290
				0.965107	0.101080

ばらつき α の離散近似

全セグメント共通の α のベイズ事後分布と、前頁の表から算出された α の離散近似を次表に示す

ロジックツリーにする際には、 α の値と確率重みをそれぞれ丸めてキリのよい数値とすることも考えられる

ロジックツリーを使わない場合、ベイズ事前分布を離散近似する必要性は薄く、ベイズ事後分布をそのまま予測に用いるべきである

3つの値による離散近似

α の値	確率重み
0.145	0.247614
0.257	0.504771
0.446	0.247614

4つの値による離散近似

α の値	確率重み
0.131	0.150361
0.210	0.349639
0.314	0.349639
0.492	0.150361

5つの値による離散近似

α の値	確率重み
0.121	0.101080
0.185	0.244290
0.257	0.309260
0.355	0.244290
0.529	0.101080

ばらつき α の評価方法まとめ

1. セグメント毎の尤度評価 (一様乱数を用いたモンテカルロ法)

$$L_{\text{第}m\text{セグメント}}(\mu, \alpha) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L(\mu, \alpha; t_1^{(i)}, \dots, t_{n_m}^{(i)})$$

2. α の事後分布の評価 (セグメント共通の事後分布への統合)

$$posterior_{\text{第}m\text{セグメント}}(\alpha_k) = \frac{\int_{\log 100}^{\log 20000} L_{\text{第}m\text{セグメント}}(\mu, \alpha_k) d \log \mu}{\int_0^1 \int_{\log 100}^{\log 20000} L_{\text{第}m\text{セグメント}}(\mu, \alpha) d \log \mu d \alpha} \doteq \frac{\sum_{j=1}^J L_{\text{第}m\text{セグメント}}(\mu_j, \alpha_k)}{\sum_{k'=1}^K \sum_{j=1}^J L_{\text{第}m\text{セグメント}}(\mu_j, \alpha_{k'})}$$

$$posterior(\alpha_k) = \frac{\prod_{m=1}^M posterior_{\text{第}m\text{セグメント}}(\alpha_k)}{\int_0^1 \prod_{m=1}^M posterior_{\text{第}m\text{セグメント}}(\alpha) d \alpha} \doteq \frac{\prod_{m=1}^M posterior_{\text{第}m\text{セグメント}}(\alpha_k)}{\sum_{k'=1}^K \prod_{m=1}^M posterior_{\text{第}m\text{セグメント}}(\alpha_{k'})}$$

3. α の事後分布の離散近似 (α の重み付け分岐)

3つの値による離散近似		4つの値による離散近似		5つの値による離散近似	
α の値	確率重み	α の値	確率重み	α の値	確率重み
0.145	0.247614	0.131	0.150361	0.121	0.101080
0.257	0.504771	0.210	0.349639	0.185	0.244290
0.446	0.247614	0.314	0.349639	0.257	0.309260
		0.492	0.150361	0.355	0.244290
				0.529	0.101080

ばらつき α の評価方法の流れ

1. セグメント毎の尤度の評価

- 不確かな活動時期に対する尤度関数
- 尤度関数のモンテカルロ近似
- MTLセグメント毎の尤度関数と最尤推定値

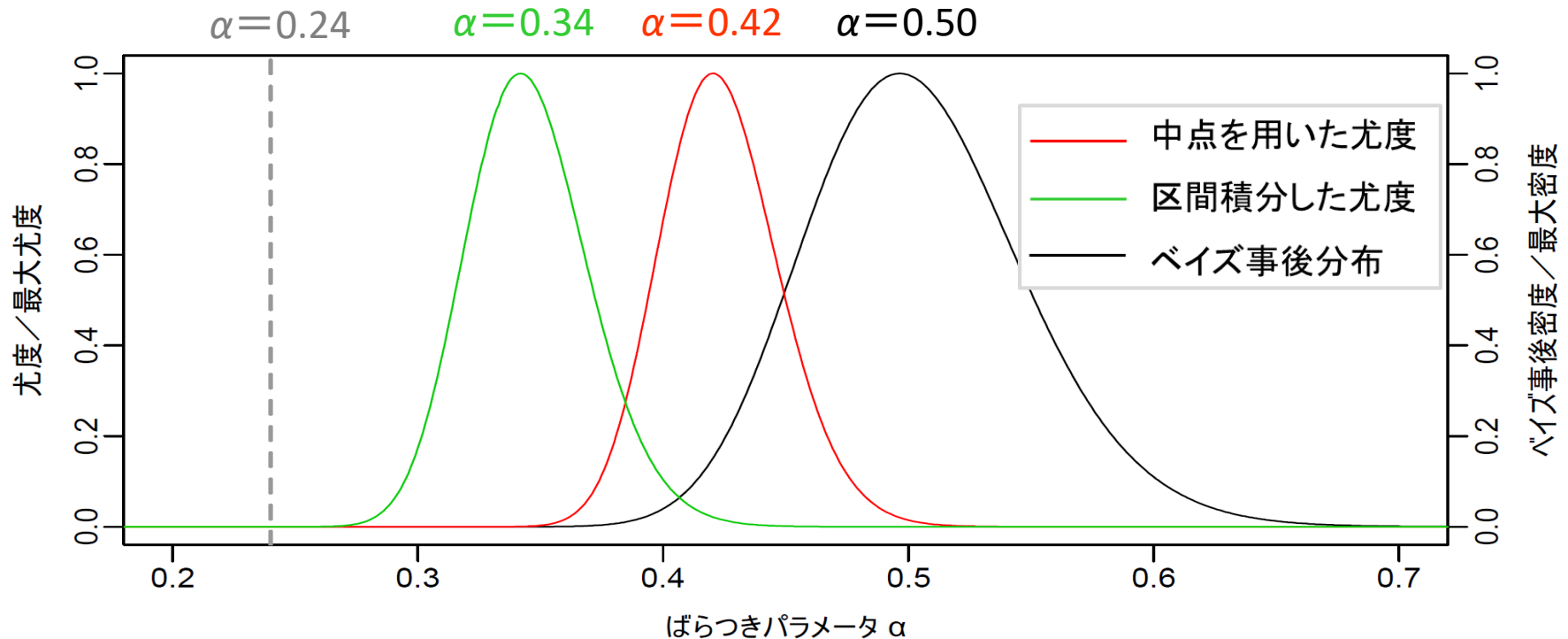
2. α のベイズ事後分布の評価

- ベイズ事前分布の設定
- ベイズ事後分布の評価
- MTLセグメントのベイズ事後分布
- ベイズ事後分布の離散近似

3. 地震本部の内陸主要活断層に対する α のベイズ事後分布

内陸主要活断層カタログに基づく α の推定

- 地震本部が長期評価で公表している内陸主要活断層のカタログのうち、**最新活動時期と1つ前の活動時期が判明している73セグメント**に対して、数値実験と同じ3手法で共通の α （ベイズの場合は事後分布）を推定した
- 3つの手法の推定値の間には、数値実験と同様の大小関係が見られており、 α のベイズ事後分布の平均 **$\alpha=0.50$ が最も偏りのない推定値**と考えられる

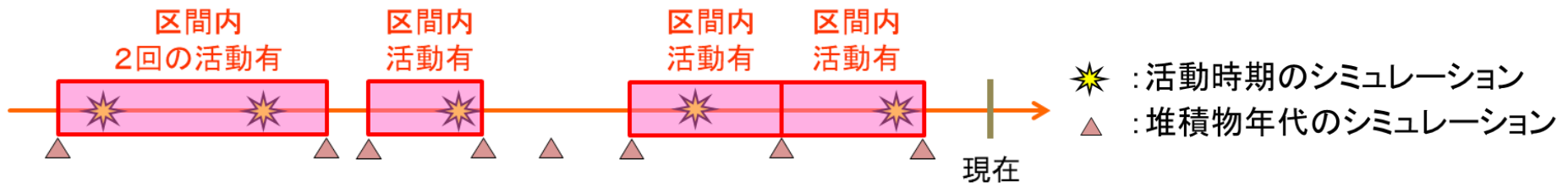


数値実験による検証(α の推定値の偏り)

- 共通の $\alpha = 0.5$ をもつ100の仮想活断層から活動履歴をシミュレートし、100活断層に共通の α を、以下の4つの方法で推定した
 - 最尤推定値は真の α の値より平均的に低く見積もられる
 - ベイズ事後分布の平均で α を推定するとほぼ偏りなく推定される

3つの活動履歴をもつ100活断層の共通の α の推定値(1000組のシミュレーション平均)

比較手法	α の推定値の平均
中点近似した尤度の最尤推定値	0.399
区間積分した尤度の最尤推定値	0.359
ベイズ事後分布の平均(ベイズ推定値)	0.500



参考文献

- [1] Miller, A. C. and Rice, T. R. (1983). Discrete Approximations of Probability Distributions, *Management Science*, 29, pp.352-362.
- [2] Nomura, S., Ogata, Y., Komaki, F. and Toda, S. (2011). Bayesian forecasting of the recurrent earthquakes and its predictive performance for a small sample size, *Journal of Geophysical Research*, 116, B04315.
- [3] 野村俊一, 尾形良彦 (2017). 最新の活断層カタログに基づくBPT予測, 「地震予知連絡会会報」, 第98巻, pp.443-448, 2017年9月.
- [4] 野村俊一, 尾形良彦 (2018). BPTモデルの共通のばらつきパラメータの推定とベイズ型予測, 「地震予知連絡会会報」, 第100巻(掲載予定).
- [5] Ogata, Y. (1999). Estimating the hazard of rupture using uncertain occurrence times to of paleoearthquakes, *Journal of Geophysical Research*, 104, pp.17995-18014.